

۱- مفهوم گزاره

در منطق ریاضی به هر جمله‌ی خبری که بتوانیم دقیقاً یکی از دو ارزش درستی یا نادرستی را نسبت بدهیم، هر چند که درستی یا نادرستی آن بر ما پوشیده باشد، یک گزاره گفته می‌شود.

به‌عنوان مثال جمله «۱۹ عددی اول است» یا « $۳ < ۲$ » همگی جملات خبری هستند و یک گزاره‌اند ولی جمله‌ی خبری «حافظ شاعر خوبی است» نمی‌تواند یک گزاره تلقی شود، چرا که درستی یا نادرستی آن دقیقاً معین نیست، زیرا برحسب سلیقه تغییر می‌کند.

دقت کنید جمله‌های غیر خبری از قبیل جملات عاطفی، امری و پرسشی همچون «چه گل زیبایی!» یا «لطفاً پنجره را باز کنید» یا «آیا ۱۶ عددی زوج است» نمی‌توانند یک گزاره باشند، چرا که نمی‌توان ارزش درستی یا نادرستی آن‌ها را تعیین کرد.

مثال

کدام یک از عبارات زیر گزاره است؟

(۱) آیا $\sqrt{۲}$ عددی گنگ است؟

(۲) بهار فصل قشنگی است.

(۳) لطفاً درب کلاس را ببند.

(۴) $۱ + ۱۰^{۱۳}$ عددی اول است.

گزینه‌ساز: گزینه‌ی ۴

به بررسی تک تک گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه‌ی «۱»: این عبارت یک گزاره نیست، زیرا یک جمله‌ی پرسشی است و ارزش درستی یا نادرستی آن معلوم نیست.

گزینه‌ی «۲»: این عبارت نیز یک جمله‌ی عاطفی است و گزاره نیست و برحسب سلیقه تغییر می‌کند، پس ارزش درستی یا نادرستی آن مشخص نیست.

گزینه‌ی «۳»: این عبارت یک جمله امری است، پس گزاره نیست.

گزینه‌ی «۴»: این عبارت یک جمله‌ی خبری است که گزاره است زیرا درستی یا نادرستی آن قابل تشخیص است.

در منطق ریاضی و در جبر گزاره‌ها هر گزاره را با یکی از حروف انگلیسی مانند p ، q یا r یا ... نمایش می‌دهیم.

درستی یا نادرستی یک گزاره را ارزش آن گزاره می‌گوییم و هر گزاره درست را با حرف «د» یا «T» (دقت کنید

T حرف اول کلمه‌ی True به معنی «درست» است) و هر گزاره‌ی نادرست را با حرف «ن» یا «F» (دقت کنید

F حرف اول کلمه‌ی False به معنی «نادرست» است) نشان می‌دهیم.

۲- نقیض گزاره

نقیض یک گزاره، گزاره‌ای است که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش گزاره‌ی اولیه باشد. نقیض گزاره‌ی p را با نماد $(\sim p)$ و آن را به صورت «نقیض p » یا «چنین نیست که p » می‌خوانیم و چون یک گزاره یک جمله‌ی خبری است و حتماً دارای فعل می‌باشد، برای بیان نقیض یک گزاره کافی است فعل جمله را نفی کنیم که با این کار ارزش گزاره‌ی p اگر درست باشد ارزش گزاره‌ی $(\sim p)$ نادرست و اگر p گزاره‌ای نادرست باشد، ارزش گزاره‌ی $(\sim p)$ درست خواهد بود. به عنوان مثال نقیض گزاره‌ی « ۳ عددی فرد است» به صورت « ۳ عددی فرد نیست» نوشته می‌شود.

مثال

نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید؟

$$(۱) \sqrt{۲} \text{ عددی گویا است.}$$

$$(۲) ۱ < -۴$$

$$(۳) ۱۰^۱ + ۱۰^۲ = ۱۰^۳$$

گزینه‌ها:

نقیض هر یک از گزاره‌ها را به دست می‌آوریم:

گزینه‌ی «۱»: نقیض گزاره‌ی « $\sqrt{۲}$ عددی گویا است» به صورت « $\sqrt{۲}$ عددی گویا نیست» یا « $\sqrt{۲}$ عددی گنگ است.» نوشته می‌شود.

گزینه‌ی «۲»: نقیض گزاره‌ی « $۱ < -۴$ » به صورت « $۱ \geq -۴$ » نوشته می‌شود.

گزینه‌ی «۳»: نقیض گزاره‌ی « $۱۰^۱ + ۱۰^۲ = ۱۰^۳$ » به صورت « $۱۰^۱ + ۱۰^۲ \neq ۱۰^۳$ » نوشته می‌شود.

ترکیب گزاره‌ها

گزاره‌ای را که از ترکیب دو یا چند گزاره بوجود می‌آید گزاره‌ی مرکب می‌گوییم. واضح است که ارزش گزاره‌ی مرکب به ارزش گزاره‌های ساده تشکیل دهنده‌ی آن و نوع رابطه‌ی به کار رفته بین آن‌ها بستگی دارد.

◀ **نکته:** اگر یک گزاره‌ی مرکب دارای n گزاره ساده باشد، تعداد حالت‌های ارزشی گزاره‌ی مرکب از رابطه ۲^n به دست می‌آید.

ترکیب گزاره‌ها توسط ۴ رابط «و»، «یا»، «شرطی» و «دوشرطی» انجام می‌شود. که به تفصیل به آنها پرداخته می‌شود.

۳- هم‌ارزی گزاره‌ها:

هم‌ارزش بودن دو گزاره‌ی p و q را با نماد $p \equiv q$ نشان می‌دهیم. یعنی برای همه حالات منطقی هر دو درست یا نادرست باشند. به عبارت ساده‌تر گزاره p را هم‌ارز منطقی یا به‌طور ساده هم‌ارز گزاره‌ی q می‌گوییم.

◀ **نکته:** برای اثبات هم‌ارزی گزاره‌ها از جدول ارزش گزاره‌ها استفاده می‌کنیم، به طوری که تمام حالات منطقی را برای گزاره‌ها به دست می‌آوریم، سپس با توجه به جدول ارزشی گزاره‌ها، ارزش گزاره‌ها را با استفاده از رابطه‌های آن‌ها به دست می‌آوریم.

۴- ترکیب عطفی دو گزاره:

ترکیب دو گزاره به وسیله لفظ «و» را ترکیب عطفی دو گزاره می‌گویند.

اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب عطفی این دو گزاره را به صورت $p \wedge q$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت « p و q » می‌خوانیم. ارزش ترکیب عطفی دو گزاره با توجه به جدول ارزشی زیر تعیین می‌گردد.

| p | q | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| د | د | د |
| د | ن | ن |
| ن | د | ن |
| ن | ن | ن |

همان‌طور که از جدول ارزش‌ها ملاحظه می‌کنید ترکیب عطفی دو گزاره فقط وقتی دارای ارزش درست است که هر دو گزاره ارزش درست داشته باشد و اگر حداقل یکی از دو گزاره نادرست باشند، « $p \wedge q$ » نادرست است.

مثال

ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید؟

الف) ۲ عددی فرد است و ۵ عددی اول است.

ب) تهران پایتخت ایران است و ۱۹ عددی اول است.

پ) $\sqrt{2}$ عددی گویا است و $1 - \sqrt{2}$ عددی مثبت است.

کلاس پاسخ:

الف) گزاره‌ی «۲ عددی فرد است» گزاره‌ای نادرست و گزاره‌ی «۵ عددی اول است» گزاره‌ای درست، پس ترکیب عطفی دو گزاره دارای ارزش نادرست است.

ب) گزاره‌ی «تهران پایتخت ایران است» گزاره‌ای درست و گزاره‌ی «۱۹ عددی اول است» نیز گزاره‌ای درست است. پس ترکیب عطفی آن‌ها نیز درست است.

پ) گزاره‌ی « $\sqrt{2}$ عددی گویا است» گزاره‌ای نادرست و گزاره‌ی « $1 - \sqrt{2}$ عددی مثبت است» نیز گزاره‌ای نادرست پس ترکیب عطفی آن‌ها نیز نادرست است.

۵- ترکیب فصلی دو گزاره:

اگر p و q دو گزاره باشند، گزاره‌ی مرکب حاصل از ترکیب دو گزاره با لفظ «یا» را ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم. ترکیب فصلی دو گزاره p و q را با نماد « $p \vee q$ » نشان می‌دهیم و آن را به صورت « p یا q » می‌خوانیم. ارزش ترکیب فصلی دو گزاره با توجه به جدول ارزشی زیر تعیین می‌گردد.

| p | q | $p \vee q$ |
|-----|-----|------------|
| د | د | د |
| د | ن | د |
| ن | د | د |
| ن | ن | ن |

همان‌طور که از جدول بالا ملاحظه می‌کنید ترکیب فصلی دو گزاره تنها وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزاره نادرست باشد و اگر حداقل یکی از دو گزاره، ارزش درست داشته باشد، در این صورت ارزش ترکیب فصلی آن‌ها درست است.

مثال

ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید؟

الف) عدد $\sqrt{2}$ عددی گویا یا گنگ است.

ب) بغداد پایتخت فلسطین یا عربستان است.

پ) $-7 < -4$ یا $-\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$ است.

گهر پاسخ:

الف) گزاره‌ی «عدد $\sqrt{2}$ عددی گویا یا عددی گنگ است» ترکیب فصلی دو گزاره است که گزاره‌ی اول نادرست و گزاره دوم درست پس ترکیب فصلی آن‌ها درست است.

ب) گزاره‌ی «بغداد پایتخت فلسطین یا پایتخت عربستان است» ترکیب فصلی دو گزاره است که هر دو گزاره نادرست هستند، پس ترکیب فصلی آن‌ها نادرست است.

پ) گزاره‌ی « $-7 < -4$ یا $-\frac{1}{3} > -\frac{1}{4}$ » ترکیب فصلی دو گزاره است که گزاره‌ی اول نادرست و گزاره‌ی دوم درست است، پس ترکیب فصلی آن‌ها درست است.

◀ **نکته:** نقیض ترکیب عطفی دو گزاره هم‌ارز است با ترکیب فصلی نقیض‌های آن گزاره‌ها، داریم:

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

◀ **نکته:** هم‌چنین نقیض ترکیب فصلی دو گزاره هم‌ارز است با ترکیب عطفی نقیض‌های آن گزاره‌ها، داریم:

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

که دو هم‌ارزی بالا به قوانین دمورگان معروفند که با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها هم‌ارزی آن‌ها ثابت می‌شود.

مثال

با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها، هم‌ارزی $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ را ثابت کنید؟

گهر پاسخ:

با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها داریم:

| p | q | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \wedge q$ | $\sim (p \wedge q)$ | $\sim p \vee \sim q$ |
|---|---|----------|----------|--------------|---------------------|----------------------|
| د | د | ن | ن | د | ن | ن |
| د | ن | ن | د | ن | د | د |
| ن | د | د | ن | ن | د | د |
| ن | ن | د | د | ن | د | د |

که با توجه به جدول بالا هم‌ارزی $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ ثابت شد.

◀ **نکته:** گزاره‌هایی نظیر $(p \vee \sim p)$ را گزاره‌هایی همیشه درست و $(p \wedge \sim p)$ را همیشه نادرست می‌نامیم. با استفاده از این گزاره‌ها بعضی از هم‌ارزی‌ها را می‌توان بدون استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها ثابت کرد.

◀ **نکته:** در گزاره‌های مرکب رابطه‌ی «و» روی «یا» توزیع پذیر است، داریم:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

به همین صورت رابطه‌ی «یا» نیز روی «و» توزیع پذیر است، یعنی داریم:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

که هم‌ارزی‌های فوق نیز با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نیز ثابت می‌شود.

مثال

هم‌ارزی گزاره‌ی $p \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$ را ثابت کنید؟

گهر پاسخ:

با استفاده از توزیع رابطه‌ی «و» روی «یا» داریم:

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \equiv p \wedge (q \vee \sim q)$$

گزاره‌ی $(q \vee \sim q)$ گزاره‌ای همواره درست است که اگر آن را با T نشان دهیم، داریم:

$$p \wedge (q \vee \sim q) \equiv p \wedge T$$

ترکیب عطفی گزاره‌ی T که همواره درست است و گزاره‌ی p بستگی به ارزش گزاره‌ی p دارد، در نتیجه داریم:

$$p \wedge T \equiv p$$

۶- ترکیب شرطی گزاره‌ها

هرگاه بخواهیم از گزاره‌ی p گزاره‌ی q را نتیجه بگیریم از لفظ «اگر ... آنگاه ...» استفاده می‌کنیم و آن را به صورت « $p \Rightarrow q$ » می‌نویسیم و آن را به یکی از صورت‌های زیر می‌خوانیم:

(اگر p آنگاه q)، (p نتیجه می‌دهد q را)، (q از p نتیجه می‌شود)

در گزاره‌ی شرطی ($p \Rightarrow q$)، p را مقدم و q را تالی می‌نامیم.

جدول ارزش گزاره‌ی شرطی به صورت زیر می‌باشد:

| p | q | $p \Rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|
| د | د | د |
| د | ن | ن |
| ن | د | د |
| ن | ن | د |

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، گزاره‌ی شرطی فقط زمانی دارای ارزش نادرست است که مقدم یعنی p درست بوده ولی تالی آن یعنی q دارای ارزش نادرست باشد و در بقیه موارد ارزش گزاره‌ی شرطی درست است.

وقتی که ارزش مقدم گزاره‌ی شرطی نادرست باشد در هر حالت خود گزاره شرطی درست خواهد بود که در این حالت می‌گوییم گزاره‌ی شرطی به انتفای مقدم دارای ارزش درست است.

مثال

ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید؟

الف) اگر ۷ عددی اول است آنگاه ۱۶ فرد و مربع کامل است.

ب) اگر $2 < 3 < 2^3$ آنگاه $3 < 2^3$ است.

پ) اگر -3 عددی طبیعی یا گویا است آنگاه تنها عدد اول زوج عدد ۲ است.

کله پاسخ:

الف) گزاره‌ی «اگر ۷ عددی اول است آنگاه ۱۶ فرد و مربع کامل است» دارای گزاره‌ی مقدم درست و گزاره‌ی تالی نادرست است زیرا گزاره‌ی تالی آن ترکیب عطفی دو گزاره است که گزاره‌ی «۱۶ عددی فرد و مربع کامل است» دارای ارزش نادرست است، پس ترکیب شرطی دو گزاره نادرست است.

ب) گزاره‌ی «اگر $2 < 3 < 2^3$ آنگاه $3 < 2^3$ است» دارای گزاره‌ی مقدم نادرست و تالی آن نیز نادرست است پس ترکیب شرطی آن‌ها درست است.

پ) مقدم گزاره یعنی « -3 عددی طبیعی یا گویا است» دارای ارزش درست است زیرا -3 عددی طبیعی نیست ولی گویا است پس ترکیب فصلی آن درست است و تالی آن که «تنها عدد اول زوج عدد ۲ است» گزاره‌ای درست است، پس ترکیب شرطی گزاره‌های مقدم و تالی درست است.

مثال

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ی دلخواه باشد، ارزش گزاره‌ی مرکب $(p \vee r) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$ کدام است؟

کله پاسخ:

با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها داریم:

| p | q | r | $\sim p$ | $\sim p \wedge q$ | $p \vee r$ | $(\sim p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$ |
|-----|-----|-----|----------|-------------------|------------|--|
| د | ن | د | ن | ن | د | د |
| د | ن | ن | ن | ن | د | د |

پس ارزش گزاره‌ی مورد نظر بستگی به گزاره‌ی r ندارد و همواره درست است.

نکته: هم‌ارز گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت $p \vee \sim q$ است که با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نیز قابل اثبات است.

۷- ترکیب دو شرطی گزاره‌ها

هرگاه بخواهیم از گزاره‌ی p گزاره‌ی q را نتیجه بگیریم و از گزاره‌ی q گزاره‌ی p را نتیجه بگیریم آن را به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » نشان می‌دهیم و به یکی از صورت‌های زیر خوانده می‌شود.

«نتیجه می‌دهد q را و q نتیجه می‌دهد p را»، «اگر p آنگاه q و اگر q آنگاه p »، «اگر p آنگاه q و برعکس»، « p شرط لازم و کافی است برای q » و «اگر و تنها اگر q » می‌خوانیم. به عبارت دیگر ترکیب دو شرطی گزاره‌های p و q به صورت ترکیب عطفی دو گزاره‌ی شرطی « $p \Rightarrow q$ » و « $q \Rightarrow p$ » است و هم‌ارزی زیر برقرار است:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow q$$

بنابراین طبق جدول ارزش گزاره‌های شرطی و عطفی ارزش گزاره‌های دو شرطی داریم:

| p | q | $p \Rightarrow q$ | $q \Rightarrow p$ | $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ |
|-----|-----|-------------------|-------------------|--|
| د | د | د | د | د |
| د | ن | ن | د | ن |
| ن | د | د | ن | ن |
| ن | ن | د | د | د |

◀ **نکته:** همان‌طور که از جدول بالا ملاحظه می‌شود اگر دو گزاره‌ی p و q هم‌ارزش باشند یعنی $p \equiv q$ (هر دو درست یا هر دو نادرست) در این صورت ارزش گزاره‌ی دو شرطی « $p \Leftrightarrow q$ » همواره درست است.

مثال

ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید؟

(الف) اگر ۴ عدد فرد است، آنگاه $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ عددی مثبت است و برعکس.
(ب) اگر دو عدد، فرد باشند، آنگاه حاصل ضرب آن‌ها فرد است و برعکس.

گهر پاسخ:

(الف) گزاره‌ی دو شرطی «اگر ۴ عدد فرد است، آنگاه $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ عددی مثبت است و برعکس» دارای ارزش درست است زیرا گزاره‌های «۴ عددی فرد است» و « $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ عددی مثبت است» نادرست هستند و در نتیجه ترکیب دو شرطی آن‌ها درست است.

(ب) گزاره‌ی دو شرطی «اگر دو عدد، فرد باشند، آنگاه حاصل ضرب آن‌ها عدد فرد است و برعکس» نیز دارای ارزش درست است، زیرا اولاً که گزاره‌ی شرطی اگر دو عدد فرد باشند، آنگاه حاصل ضرب آن‌ها فرد است گزاره‌ای درست و برعکس آن نیز اگر حاصل ضرب دو عدد فرد باشد، آنگاه دو عدد فرد هستند. نیز درست است. پس گزاره‌ی دو شرطی آن‌ها که ترکیب عطفی این دو گزاره‌ی شرطی است، درست است.

مثال

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست باشد، در این صورت ارزش گزاره‌ی مرکب « $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ » را مشخص کنید؟

گهر پاسخ:

با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها داریم:

| p | q | $\sim p$ | $p \Rightarrow q$ | $\sim p \vee q$ | $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ |
|-----|-----|----------|-------------------|-----------------|---|
| د | ن | ن | ن | ن | د |

پس ارزش گزاره‌ی مورد نظر درست است.

۱- زبان ریاضی (نماد ریاضی)

استفاده از ریاضی و نیز قواعد منطق گزاره‌ها در حل مسائل و همچنین اثبات یا رد یک گزاره به کمک ریاضی است. اولین گام در استدلال ریاضی تبدیل گزاره‌های شفاهی (کلامی) به زبان ریاضی (نماد ریاضی) است. برای تبدیل گزاره‌های شفاهی (عبارت کلامی) به نمادهای ریاضی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱- تشخیص مجهول مسأله: گزاره‌ای که یافتن ارزش آن برای ما مهم است و خواسته مسأله است که در این مرحله برای پیدا کردن مقدار مجهول (ارزش گزاره‌ای) که مسأله از ما می‌خواهد و در اکثر موارد در انتهای مسأله است، این مقادیر مجهول (گزاره‌ها) را معمولاً با یکی از حروف x ، y و ... برای عبارتهای جبری و p ، q و ... برای گزاره‌ها نام‌گذاری می‌کنیم.

۲- بیان مسأله به زبان ریاضی و ساخت معادله (ساخت ترکیب گزاره‌ها): در این قسمت مسأله را شبیه‌سازی ریاضی کرده و داده‌های مسأله را که نام‌گذاری کرده بودیم، دسته‌بندی و به صورت معادله (با استفاده از حروف ربط و منطق گزاره‌ها رابطه‌ی بین گزاره‌ها را می‌یابیم) و به صورت نماد ریاضی می‌نویسیم.

۳- حل معادله (تحلیل ترکیب گزاره‌ها و بدست آوردن ارزش ترکیب آنها): در این بخش معادله‌ی بدست آمده (ترکیب گزاره‌ها) را تحلیل می‌کنیم و پاسخ نهایی را چک می‌کنیم. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال

عددی به علاوه‌ی نصف خودش از مربع ثلث آن دو واحد کم‌تر است؟

برای تبدیل این عبارت کلامی به نماد ریاضی چون تنها یک مجهول در عبارت کلامی وجود دارد، پس عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم و خود عدد به علاوه‌ی نصف خودش معادل $x + \frac{x}{2}$ است که از مربع ثلث خود $(\frac{x}{3})^2$ دو واحد کمتر است، یعنی داریم:

$$x + \frac{x}{2} = \left(\frac{x}{3}\right)^2 - 2$$

مثال

نماد ریاضی ترکیب گزاره‌های زیر کدام است؟

(۱) مقدمه (۱): اگر هوا بارانی باشد یا مهمان به خانه ما بیاید، در نتیجه ما به سینما نمی‌رویم.

(۲) مقدمه (۲): ما به سینما می‌رویم.

∴ هوا بارانی نیست و مهمان به خانه ما نیامده‌است.

نگه‌پاسخ: برای تبدیل این عبارت کلامی به نماد ریاضی هر یک از گزاره‌ها را با یکی از حروف p ، q و r نام‌گذاری می‌کنیم. و نقیض آنها را با $\sim p$ ، $\sim q$ و $\sim r$ نشان می‌دهیم.

گزاره‌ی p : هوا بارانی باشد، گزاره‌ی q : مهمان به خانه ما بیاید r : ما به سینما نمی‌رویم

$\sim p$: هوا بارانی نیست، $\sim q$: مهمان به خانه ما نیامده است $\sim r$: ما به سینما می‌رویم

که نماد ریاضی آن به یکی از دو صورت شکل زیر می‌باشد.

$$(1) \text{ مقدمه (۱): } (p \vee q) \Rightarrow r$$

$$(2) \text{ مقدمه (۲): } \sim r \quad \text{یا} \quad ((p \vee q) \Rightarrow r) \wedge \sim r \Rightarrow \sim p \wedge \sim q$$

$$\therefore \sim p \wedge \sim q$$

در کتاب منطق با انواع قیاس‌ها آشنا شدید. قیاس‌ها ابزارهای مهمی در استدلال و به ویژه استدلال ریاضی هستند.

انواع منطق‌ها عبارتند از قیاس - استقراء - تمثیل - مغالطه.

۲- قیاس استثنایی

یکی از انواع قیاس‌ها که در استدلال‌های ریاضی کاربرد فراوانی دارد «قیاس استثنایی» است. که عبارت کلامی و نماد ریاضی آن بر یکی از دو شکل زیر است:

نماد ریاضی :

عبارت کلامی:

مقدمه (۱): اگر الف آنگاه ب

$$p \Rightarrow q$$

$$\frac{p}{\therefore q}$$

$$\text{یا } ((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$$

مقدمه (۲): الف

∴ ب

مثال

مقدمه (۱): اگر سال کبیسه باشد، آنگاه اسفند ۳۰ روز است.

مقدمه (۲): امسال، سال کبیسه است.

∴ ماه اسفند ۳۰ روزه است.

۳- مغالطه

گاهی از قیاس استثنایی به شکل نادرست استفاده می‌شود. که در نتیجه منجر به نتیجه‌گیری نادرست می‌شود، به این گونه استدلال‌های مغالطه می‌گویند.

مثال

مقدمه (۱): اگر فردا عید فطر باشد، آنگاه مدرسه تعطیل است.

مقدمه (۲): فردا مدرسه تعطیل است.

∴ فردا عید فطر است.

این استدلال نوعی مغالطه است و نتیجه ممکن است درست یا نادرست باشد، زیرا ممکن است فردا روز جمعه باشد که مدرسه تعطیل است.

گاهی اوقات اگر اثبات گزاره‌ی شرطی $p \Rightarrow q$ که درست و دشوار است، کار راحتی نباشد. برای راحتی کار می‌توان هم‌ارز آن، گزاره‌ی شرطی $\sim q \Rightarrow \sim p$ را که درست است، اثبات کرد، در این حالت می‌گوئیم عکس نقیض گزاره‌ی اصلی را ثابت می‌کنیم.

۴- عکس نقیض

مثال

ثابت کنید « اگر دو خط در یک صفحه هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند، آنگاه این دو خط با یکدیگر موازی‌اند.»

گهر پاسخ: اگر فرض کنیم:

گزاره‌ی p : دو خط در یک صفحه هیچ نقطه مشترکی ندارند.

گزاره‌ی q : دو خط موازی یک‌دیگرند.

برای اثبات از عکس نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ یعنی $\sim q \Rightarrow \sim p$ استفاده می‌کنیم. یعنی نشان می‌دهیم اگر دو خط موازی یک‌دیگر نباشند، در این صورت در یک نقطه یک‌دیگر را حتماً قطع می‌کنند و این به معنی این است که دو خط با یک‌دیگر در یک نقطه مشترکند. پس حکم درست است.

۵- یافتن خطا در استدلال ریاضی

گاهی در یک استدلال یا اثبات ریاضی دچار خطا می‌شویم، یافتن خطا در یک استدلال برای رفع ایراد آن بسیار مهم است، کشف محل اشکال در یک استدلال همواره ساده نیست و نیاز به مهارت و دقت دارد.

مثال

در ساده کردن عبارت گویای زیر، خطا در کدام مرحله رخ داده است؟

$$\text{گام اول } A = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 + x}$$

$$\text{گام دوم } A = \frac{x^3 + (x-1)(x+1)}{x(x+1)}$$

$$\text{گام سوم } A = \frac{x^3 + (x-1)(x+1)}{x(x+1)}$$

$$\text{گام چهارم } A = x^2 + x - 1$$

گهر پاسخ:

برای ساده کردن عبارت گویا، خطا در گام سوم رخ داده است. زیرا در جمع دو عبارت جبری صورت کسر نمی‌توان عوامل آن را با مخرج کسر ساده کرد و این کار خطا است. اگر به جای جمع ضرب داشتیم، مجاز به این کار بودیم.