

۱۴ ثابت کنید:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

ب) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

۱۵ نموداری از یک تابع رسم کنید که:

الف) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد نداشته باشد.
ب) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده و در این نقطه حد داشته باشد.

۱۶ با رسم نمودار تابع $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ ، حدود زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]$ ب) $\left[\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \right]$

۱۷ دو تابع f و g را چنان تعریف کنید که در نقطه $x=0$ حد نداشته باشد، اما

$f \times g$ در نقطه $x=0$ دارای حد باشد.

۱۸ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin x - \sin \alpha}{x - \alpha}$

۱۹ مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x=2$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a[x] + b[-x] & x > 2 \\ 2a + 3 & x = 2 \\ \left[\frac{x}{2} \right] - 2b & x < 2 \end{cases}$$

۱۱ مفاهیم زیر را تعریف کنید.

الف) صفرهای تابع:

ب) تابع لگاریتمی:

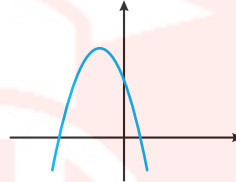
ج) یک رادیان:

د) همسایگی محذوف X :

۱۲ مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند، چقدر است؟

۱۳ الف) نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$

به صورت مقابل است. علامت b و c را مشخص کنید.



ب) معادله $2\sqrt{x^2 + x} + 3\sqrt{x} = 0$ چند جواب دارد؟

ج) برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید: $|ab| = |a||b|$

۱۴ اگر نقطه $A(2,3)$ رأس یک مربع و معادله یک ضلع مربع $3x - 4y = 9$ باشد،

مساحت مربع را محاسبه نمایید.

۱۵ آیا دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \frac{x - 2x^2}{x}$ و $g(x) = \frac{(x^2 + x)(1 - 2x)}{x(1 + x^2)}$ با هم برابرند؟

۱۶ تعداد ریشه‌های معادله $|x-2| - \sqrt{x+1} + 1 = 0$ را به روش هندسی حل معادلات

بیابید.

۱۷ الف) ضابطه، دامنه و برد وارون تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ را به دست آورید.

ب) برای دو تابع $f(x) = \frac{1}{x-3}$ و $g(x) = \frac{4}{x-1}$ ، دامنه تابع $g \circ f$ را به دست

آورید.

۱۸ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 2 + 3^{1-x}$ را رسم کنید.

۱۹ عبارت درست را با \checkmark و عبارت نادرست را با \times علامت بزنید.

الف) لگاریتم اعداد مثبت کمتر از ۱ همواره عددی منفی است.

ب) تابع لگاریتم، تابع یک به یک است.

۱۱۰ الف) برای اعداد حقیقی $a, b > 0$ و $b \neq 1$ و عدد طبیعی n ، نشان دهید که

$$\log_b a^n = n \log_b a$$

ب) معادله لگاریتمی $1 - \log x = \log(x+3)$ را حل نمایید.

۱۱۱ حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

الف) $\sin \frac{\pi}{12}$ ب) $\cot\left(\frac{-5\pi}{3}\right)$

۱۱۲ طول برف‌پاک‌کن شیشه عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی‌متر است. اگر اندازه کمان طی

شده توسط این برف‌پاک‌کن 120° باشد، طول کمان طی شده توسط نوک برف

پاک‌کن چند سانتی‌متر است؟

۱۱۳ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 1 + |\cos x|$ را در فاصله $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

حسابان ۱ (پایه یازدهم رشته ریاضی)

الف) برای هر تابع f ، جواب‌های معادله $f(x) = 0$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع می‌نامیم.

ب) اگر a عددی مثبت و مخالف یک باشد، تابع نمایی $f(x) = a^x$ یک به یک است از این رو دارای تابع f^{-1} است که تابع لگاریتمی پایه a نامیده می‌شود و با نماد $y = \log_a^x$ نشان داده می‌شود.
 ج) یک رادیان، در هر دایره دلخواه، اندازه زاویه‌ای مرکزی است که طول کمان روبه‌رو آن برابر با طول شعاع دایره است.
 د) اگر $x \in (a, b)$ ، مجموعه $\{x, (a, b)\}$ را همسایگی محذوف x می‌نامیم.

۱۰۲, ۱۰۸, ۱۱۴, ..., ۹۹۶

$a_n = a + (n-1)d \rightarrow 996 = 102 + (n-1) \times 6 \rightarrow n = 150$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = 75(102 + 996) = 82350$

الف) $c > 0$ و $b < 0$
 ب) یک جواب $x = 0$ دارد.

ج) $|ab| = \sqrt{a^2 b^2}$
 $= \sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2}$
 $= |a||b|$

۴) در معادله ضلع مربع صدق نمی‌کند، زیرا:

$3(2) - 4(2) \neq 9$

پس A مقابل ضلع این مربع است، بنابراین:

$AH = a = \frac{|3(2) - 4(2) - 9|}{\Delta} = 3$

$a^2 = 9$ مساحت مربع

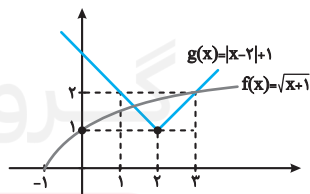
$D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

$g(x) = \frac{x(x^2+1)(1-2x)}{x(1+x^2)} = \frac{x(1-2x)}{1+x^2} = \frac{x-2x^2}{1+x^2} = f(x)$

زیرا $1+x^2 \neq 0$ و می‌توان آن را از صورت و مخرج ساده کرد.

۶) $|x-2| - \sqrt{x+1} + 1 = 0 \rightarrow |x-2| + 1 = \sqrt{x+1}$

با فرض $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = |x-2| + 1$ رسم نمودارهای این دو تابع ملاحظه می‌کنیم که این معادله دارای دو ریشه است.



الف) $D_f = [2, +\infty) = R_f^{-1}$, $R_f = [1, +\infty) = D_f^{-1}$

$y = \sqrt{x-2} \rightarrow y^2 = x-2 \rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 2$

ب) $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

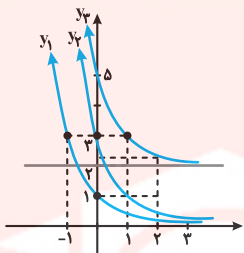
$x \in \mathbb{R} - \{2\} \mid \frac{1}{x-2} \neq 1 \rightarrow x \neq 4$

$\rightarrow D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{2, 4\}$

$f(x) = 3^{1-x} + 2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 2$

$y_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$

$y_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 2$



الف) x ب) \checkmark

الف) $\log_b^a n = \log_b^{a \times a \times \dots \times a} n = \log_b^a n + \log_b^a n + \dots + \log_b^a n$
 $= n \log_b^a n$

ب) $\log x + \log(x+2) = 1 \rightarrow x^2 + 2x = 10 \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-5 \end{cases}$

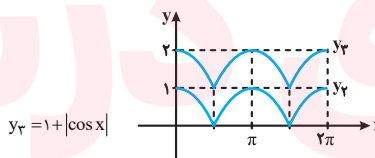
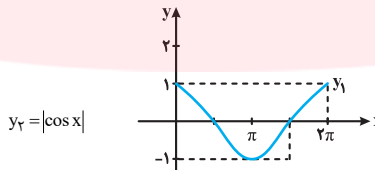
الف) $\cos \frac{\pi}{6} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{12} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{12}$
 $\rightarrow \sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$

ب) $\cot\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = -\cot(16\pi + \frac{2\pi}{3}) = -\cot\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

رادیان $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$

سانتی‌متر $L = r\theta = 24 \times \frac{2\pi}{3} = 16\pi$

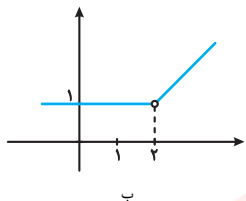
$y_1 = \cos x$



الف) $\frac{1}{2}[\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha] = \sin \alpha \cos \beta$

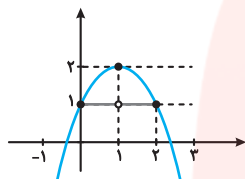
ب) $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$
 $= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

۱۵) $D_f = [2, +\infty) = R_f^{-1}$, $R_f = [1, +\infty) = D_f^{-1}$



برای نمودارهای درست دیگر، نمره را در نظر بگیرید. این سؤال باز پاسخ است.

۱۶) با توجه به نمودارهای $y = f(x)$ و $y = [f(x)]$ داریم:



$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = [2] = 2$

$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = 1$

$f(x) = \begin{cases} 3 & x \geq 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x \geq 0 \\ \frac{1}{2} & x < 0 \end{cases}$

حد دو تابع f و g در نقطه $x=0$ موجود نیست، اما: $\lim_{x \rightarrow 0} f \times g = 1$ موجود است، زیرا:

$f \times g = \begin{cases} 3 \times \frac{1}{3} & x \geq 0 \\ 2 \times \frac{1}{2} & x < 0 \end{cases} = 1$

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} -\sqrt{x} = -1$

ب) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin a \cos t + \cos a \sin t - \sin a}{t} = \cos a$

$\begin{cases} x-a=t \\ x \rightarrow a \Rightarrow t \rightarrow 0 \\ x=a+t \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2a - 3b$
 $f(2) = 2a + 3$
 $\Rightarrow b = -1$

$f(2) = 2a + 3$
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -2b$
 $\Rightarrow -2b = 2a + 3$

$\rightarrow 2 = 2a + 3$

$\rightarrow a = -\frac{1}{2}$