

۱- توابع f و g در \mathbb{R} با ضابطه‌ی $f(x) = x + 2$ و $g(x) = x - 1$ مفروض اند ضابطه‌ی $(f \circ g)^{-1}(x)$ برابر با کدام عبارت است؟

- ① $x - 2$ ② $x + 2$ ③ $x - 1$ ④ $x + 1$

۲- اگر $(f \circ g)(x) = -f(x)$ و $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ باشد آن گاه $g(x)$ کدام است؟
($x \neq 0, 1$)

- ① $\frac{1}{x}$ ② $\frac{2}{x}$ ③ x ④ $2x$

۳- اگر رابطه‌ی $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$ تابع یک به یک باشد، دوتایی (a, b) کدام است؟

- ① $(-1, 1)$ ② $(-1, 3)$ ③ $(2, 1)$ ④ $(2, 3)$

۴- اگر داشته باشیم $f^{-1}(x) = 8x^3 + 4x$ ، $g(x) = 2f\left(\frac{x}{3}\right)$ ، $g^{-1}(x) = ax^3 + bx$ ، آنگاه $a + b$ کدام است؟

- ① ۱ ② ۶ ③ ۹ ④ ۱۸

۵- اگر $f(x) = 4 - 3^{2x}$ باشد، دامنه‌ی تابع $g(x) = \sqrt{xf^{-1}(x)}$ ، کدام است؟ (با تغییر)

- ① $[2, 3]$ ② $[3, 4]$ ③ $[0, 3]$ ④ $[0, 4]$

۶- دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{-x^2(x^2 - 9)^4}$ چند عضو دارد؟

- ① صفر ② ۱ ③ ۳ ④ ۴

۷- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} - \frac{1}{x^2 - 1} - 2$ شامل چند عدد گویا نمی‌باشد؟

- ① صفر ② ۴ ③ ۶ ④ ۲

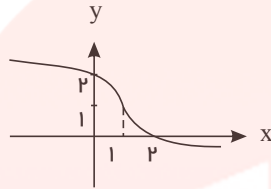
۸- رابطه‌ی $f = \{(9, 3m + 4), (3, -14m), (3, 8), (10, -2), (9, 7m^2)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟

- ① ۱ ② -2 ③ $-\frac{4}{7}$ ④ هیچ مقدار m

۹- تابع $f(x) = \frac{1}{x-5}$ و $g(x) = \frac{x}{x+1}$ مفروض هستند، $D_{f \circ g}$ کدام است؟

- ① $\mathbb{R} - \{-1, 5\}$ ② $\mathbb{R} - \{-5\}$ ③ $\mathbb{R} - \{-\frac{5}{4}\}$ ④ $\mathbb{R} - \{-1, -\frac{5}{4}\}$

۱۰- نمودار تابع $f(x)$ به صورت روبه‌رو می‌باشد. تعداد جواب‌های معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ کدام است؟



- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ صفر

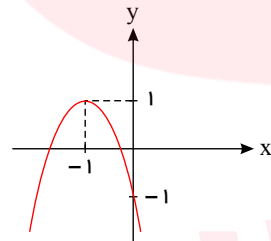
۱۱- اگر بدانیم که $f(x) = 2^{-x}$ و $g = \{(5, 6), (4, 5), (2, 1), (3, a)\}$ حداکثر a برای این که تابع $f \circ g$ نزولی باشد، کدام است؟

- ① ۵ ② ۴ ③ ۲ ④ ۱

۱۲- نمودارهای دو تابع $f(x) = \frac{4\sqrt{2}}{2^x}$ و $g(x) = (\sqrt{2})^{ax+1}$ در نقطه‌ای به طول ۱ متقاطع هستند، حاصل $f^{-1}(a)$ کدام است؟

- ① $\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{3}{4}$

۱۳- نمودار تابع $f(x) = \frac{a}{2}(x+b)^2 + \frac{c}{3}$ در زیر رسم شده است. حاصل $a+bc$ کدام است؟

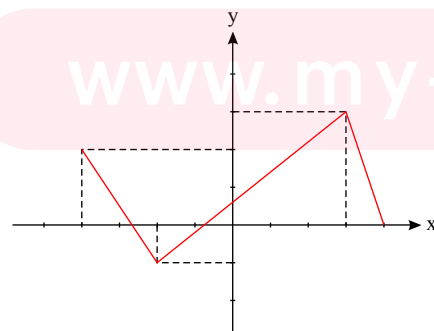


- ① +۱ ② -۳ ③ -۱ ④ +۳

۱۴- کدام یک از توابع زیر معکوس پذیر هستند؟

- ① $f(x) = |x-1| + 2$ ② $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$ ③ $f(x) = 2 \log(x+1)$ ④ $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

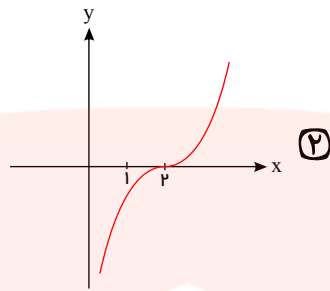
۱۵- اگر $f(x)$ به صورت زیر باشد، تفاضل ماکزیمم دامنه $f(x-1)$ از مینیمم برد



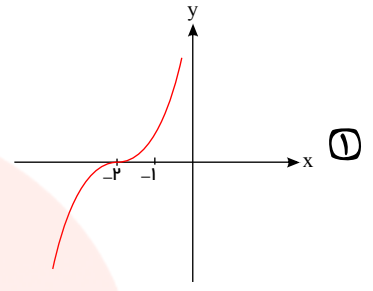
$f(x+1)$ کدام است؟

- ① ۶ ② ۷ ③ ۴ ④ ۵

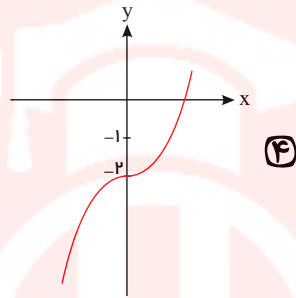
۱۶- نمودار تابع $y = (x - 2)^3$ کدام است؟



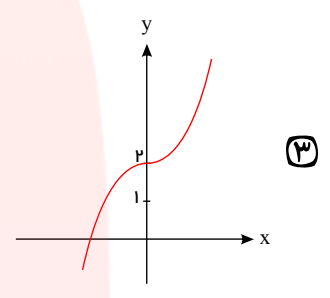
۲



۱



۴



۳

۱۷- اگر ضابطه تابع معکوس تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ بصورت

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} + 3$$

حاصل $a + b - c$ کدام است؟

۴۷ ۴

۴۴ ۳

۴۵ ۲

۴۶ ۱

۱۸- اگر عبارت $x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 + m$ به ازای هر عدد طبیعی n بر عبارت

$$x + 2$$

بخش پذیر باشد، آنگاه باقی مانده تقسیم آن بر $x^2 - 1$ کدام است؟

۲x + 4 ۴

۳x - 4 ۳

-2x + 1 ۲

-3x - 6 ۱

۱۹- اگر باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 1$ و $x^2 - 9$ به ترتیب $x + 6$ و $x - 4$ باشد،

باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 2x - 3$ کدام است؟

$\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$ ۴

4x - 27 ۳

$-\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$ ۲

$x^2 + 2x - 24$ ۱

۲۰- تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ مفروض است. تابع $g(x) = \sqrt[3]{x}$ با کدام یک

از انتقال های زیر بر تابع f^{-1} منطبق می شود؟

۱) یک واحد به سمت چپ و ۲ واحد به سمت بالا ۲) یک واحد به سمت چپ و ۲ واحد به سمت پایین

۳) یک واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت بالا ۴) یک واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت پایین

پاسخنامه تشریحی

۱- گزینه ۳

$$(f \circ g)(x) = (x - 1) + 2 = x + 1$$

$$x + 1 = y \Rightarrow y - 1 = x \Rightarrow y^{-1} = x - 1 = (f \circ g)^{-1}(x)$$

۲- گزینه ۱

به کمک تابع $f(x)$ تابع $f(g(x))$ را می‌سازیم و مساوی تابع $y = f \circ g(x)$ که صورت سؤال داده قرار می‌دهیم تا $g(x)$ محاسبه شود.

$$f(g(x)) = \frac{g(x) + 1}{g(x) - 1} = \frac{-x - 1}{x - 1} \Rightarrow xg(x) - g(x) + x - 1 = -xg(x) - g(x) + x + 1$$

$$\Rightarrow 2xg(x) = 2 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x}$$

۳- گزینه ۴ الف) شرط تابع بودن: هیچ دو زوج مرتب متمایز، مولفه‌ی اول برابر نداشته باشند.

$$(3, 2) = (3, a^2 - a) \Rightarrow a^2 - a = 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

ب) شرط یک به یک بودن: هیچ دو زوج مرتب متمایز، مولفه‌ی دوم برابر نداشته باشند.

$$(3, 2) = (b, 2) \Rightarrow b = 3$$

اما از میان دو مقدار به دست آمده برای a ، باید یکی را به گونه‌ای انتخاب کنیم که شرایط الف) و ب) کماکان برقرار بماند. در نتیجه فقط $a = 2$ قابل قبول می‌باشد زیرا اگر $a = -1$ باشد، دو زوج مرتب $(-1, 4)$ و $(-1, 5)$ در مجموعه دیده می‌شوند که در آن صورت مجموعه‌ی حاصل تابع نخواهد بود. در نتیجه $(a, b) = (2, 3)$ می‌باشد.

۴- گزینه ۳

$$y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = x \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$g(x) = 2f\left(\frac{x}{3}\right) = y \Rightarrow \begin{cases} x = g^{-1}(y) \\ f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{x}{3} = f^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) \Rightarrow x = 3f^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(y) = 3f^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) \Rightarrow g^{-1}(x) = 3f^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) = 3\left(8\left(\frac{x}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 3x^3 + 6x$$

$$a = 3, b = 6 \Rightarrow a + b = 9$$

۵- گزینه ۳

می دانیم: $\log_a^a e = 1$, $\log a^b = b \cdot \log a$

ابتدا $f^{-1}(x)$ را می یابیم:

$$(x) = 4 - 3^{2x} \rightarrow y = 4 - 3^{2x} \rightarrow 3^{2x} = 4 - y \xrightarrow[\text{پایه سه می گیریم}]{\text{از طرفین لگاریتم در}} 2x = \log_3(4 - y) \rightarrow x = \frac{1}{2} \log_3(4 - y)$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \log_3(4 - x) \quad 4 - x > 0 \rightarrow x < 4 \rightarrow D_{f^{-1}} = (-\infty, 4)$$

$$g(x) = \sqrt{x f^{-1}(x)} \Rightarrow g(x) = \sqrt{\frac{1}{2} x \cdot \log_3(4 - x)} \Rightarrow \log_3(4 - x) = 0 \Rightarrow 4 - x = 1 \Rightarrow x = 3$$

برای یافتن دامنه $g(x)$ باید ریشه های عبارت زیر رادیکالی را بیابیم و سپس تعیین علامت کنیم.

x	$-\infty$	0	3	4
$\frac{1}{2} x \log(4 - x)$		-	+	-

جواب: $D_f = [0, 3]$

۶- گزینه ۳

$$-x^2(x^2 - 9)^4 \geq 0 \Rightarrow \underbrace{x^2(x^2 - 9)^4}_{\text{نامنفی}} \leq 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 9)^4 = 0$$

$$x^2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 0} , \quad x^2 - 9 = 0 \rightarrow \boxed{x = \pm 3} \rightarrow D_f = \{0, 3, -3\}$$

۷- گزینه ۲ باید ریشه های تمام مخرج ها را حذف کنیم

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

$$\frac{1}{x^2 - 1} - 2 = 0 \rightarrow \frac{1}{x^2 - 1} = 2 \rightarrow x^2 - 1 = \frac{1}{2} \rightarrow x^2 = \frac{3}{2} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ \pm 2, \pm 1, \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \right\} \text{ تا } \pm 2, \pm 1 \rightarrow \text{اعداد گویایی که در دامنه نیستند}$$

۸- گزینه ۳

$$(3, -14m), (3, 8) \Rightarrow -14m = 8 \rightarrow m = -\frac{8}{14} \rightarrow m = -\frac{4}{7} \quad (1)$$

$$3m + 4, 9 = -2$$

$$\frac{4}{7}$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow m = -\frac{4}{7}$$

$$(9, 7m^2) \Rightarrow 7m^2 = 3m + 4 \rightarrow 7m^2 - 3m - 4 = 0 \rightarrow m = 1, m$$

۹- گزینه ۴

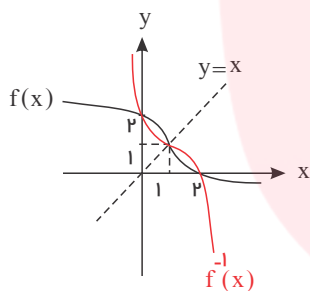
$$D_f : x \neq 5, \quad D_g : x \neq -1$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq -1 \mid g(x) \neq 5\} \quad (1)$$

$$g(x) \neq 5 \rightarrow \frac{x}{x+1} \neq 5 \Rightarrow 5x + 5 \neq x \Rightarrow x \neq -\frac{5}{4}$$

$$(1) \rightarrow D_{f \circ g} = \left\{ x \neq -1 \mid x \neq -\frac{5}{4} \right\} = \mathbb{R} - \left\{ -1, -\frac{5}{4} \right\}$$

۱۰- گزینه ۳



جوابهای معادله $f(x) = g(x)$ ، طول نقاط برخورد نمودارهای دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ است.

اگر $f(x)$ تابعی یک به یک باشد، برای به دست آوردن نمودار تابع $f^{-1}(x)$ ، کافی است قرینه $f(x)$ را نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) به دست بیاوریم. نمودار $f^{-1}(x)$ را رسم می کنیم:

با توجه به شکل، واضح است که توابع $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ هر دو از سه نقطه $(0, 2)$ ، $(1, 1)$ و $(2, 0)$ می گذرند.

بنابراین معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ دارای سه جواب است.

۱۱- گزینه ۱ بنا به تعریف دامنه تابع $f \circ g(x)$ داریم:

$$D_{f \circ g(x)} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$D_g = \{5, 4, 2, 3\}, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$\Rightarrow f \circ g = \left\{ (5, 2^{-6}), (4, 2^{-5}), (2, 2^{-1}), (3, 2^{-a}) \right\}$$

$$= \left\{ (5, \frac{1}{64}), (4, \frac{1}{32}), (3, \frac{1}{2^a}), (2, \frac{1}{2}) \right\}$$

برای اینکه $f \circ g$ نزولی باشد لازم است با افزایش ورودی تابع، خروجی آن کاهش یابد یا ثابت بماند. بنابراین لازم است:

$$(f \circ g)(4) \leq (f \circ g)(3) \leq (f \circ g)(2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{32} \leq \frac{1}{2^a} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 32 \geq 2^a \geq 2 \Rightarrow 5 \geq a \geq 1 \Rightarrow a_{\max} = 5$$

۱۲- گزینه ۱ بنا به فرض، تابع $f(x) = \frac{4\sqrt{2}}{2^x}$ و $g(x) = (\sqrt{2})^{ax+1}$ در نقطه $x = 1$ متقاطع هستند، پس داریم:

$$f(1) = g(1) \Rightarrow \frac{4\sqrt{2}}{2} = (\sqrt{2})^{a+1} \Rightarrow 2\sqrt{2} = (\sqrt{2})^{a+1}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2})^3 = (\sqrt{2})^{a+1} \Rightarrow a+1 = 3 \Rightarrow a = 2$$

$$f^{-1}(a) = f^{-1}(2) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = 2 \Rightarrow \frac{4\sqrt{2}}{2^\alpha} = 2$$

$$\Rightarrow 2^\alpha = 2\sqrt{2} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$$

۱۳- گزینه ۳ با توجه به رأس سهمی خواهیم داشت:
 $(-1, 1)$

$$b = 1, \frac{c}{3} = 1 \Rightarrow c = 3$$

$$\text{بنابراین: } f(x) = \frac{a}{2}(x+1)^2 + 1$$

با توجه به اینکه $f(x)$ از نقطه $(0, -1)$ عبور می کند خواهیم داشت:

$$-1 = \frac{a}{2}(0+1)^2 + 1 \Rightarrow \frac{a}{2} = -2 \Rightarrow a = -4$$

$$\Rightarrow a + bc = -4 + 1 \times 3 = -4 + 3 = -1$$

۱۴- گزینه ۳ برای آنکه یک تابع معکوس پذیر باشد باید یک به یک باشد؛ بنابراین خواهیم داشت:

گزینه ۱: به ازای $x = 2$ و $x = 0$ می توان فهمید که یک به یک نیست.

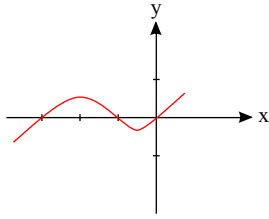
گزینه ۲:

$$x = 0$$

$$x^3 + 4x^2 + 3x = x(x^2 + 4x + 3) = x(x+1)(x+3) = 0 \rightarrow x = -1$$

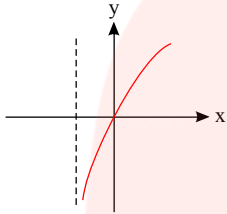
$$x = -3$$

با توجه به شکل $f(x)$ می توان فهمید که یک به یک نیست.



گزینه ۴: چون تابع متناوب است بنابراین یک به یک نیست.

گزینه ۳: با توجه به شکل می توان گفت یک به یک است.



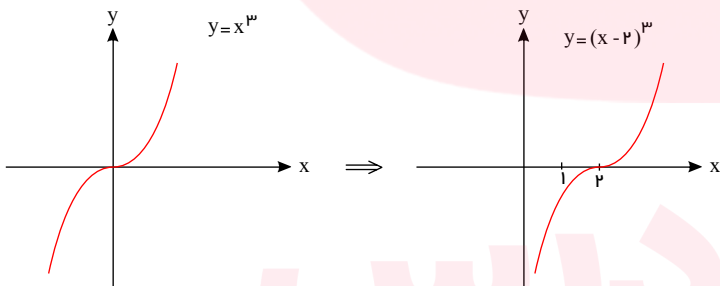
۱۵- گزینه ۱

$$D_{f(x)} = [-4, 4] \Rightarrow D_{f(x-1)} = [-3, 5] \Rightarrow \text{Max}(D_{f(x-1)}) = 5$$

$$R_{f(x)} = [-1, 3] \Rightarrow R_{f(x+1)} = [-1, 3] \Rightarrow \text{Min}(R_{f(x+1)}) = -1$$

$$\text{تفاضل} = 5 - (-1) = 6$$

۱۶- گزینه ۲ برای رسم $y = (x-2)^3$ باید نمودار $y = x^3$ را ۲ واحد به راست انتقال دهیم.



۱۷- گزینه ۳ تابع معکوس تابع $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} + 3$ همان تابع $f(x)$ است، پس داریم:

$$y = \sqrt[3]{x-1} + 3 \Rightarrow \sqrt[3]{x-1} = y-3 \Rightarrow x-1 = (y-3)^3 \Rightarrow x = 1 + (y-3)^3$$

$$\Rightarrow y = f(x) = 1 + (x-3)^3 = 1 + x^3 - 9x^2 + 27x - 27$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 26 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$\Rightarrow a = -9, b = 27, c = -26 \Rightarrow a + b - c = -9 + 27 + 26 = 44$$

۱۸- گزینه ۱ برای یافتن باقی‌مانده تقسیم بر عبارت $x + 2 = 0$ باید ریشه مقسوم‌علیه یعنی $x + 2 = 0$ را در عبارت مقسوم قرار دهیم.

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = (-2)^{2n+1} + 2(-2)^{2n} + (-2)^5 - 5(-2)^3 + m = 0$$

به‌ازای عدد طبیعی n ، عبارت $2n + 1$ فرد و عبارت $2n$ زوج است، پس داریم:

$$-2^{2n+1} + 2 \times 2^{2n} - 32 - 5(-8) + m = 0 \Rightarrow -2^{2n+1} + 2^{2n+1} - 32 + 40 + m = 0$$

$$\Rightarrow m = -8 \Rightarrow f(x) = x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 - 8$$

با جای‌گذاری $x^2 = 1$ در مقسوم، باقی‌مانده به دست می‌آید.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$(x^2)^n \times x + 2(x^2)^n + (x^2)^2 x - 5x^2 \cdot x - 8 = (1)^n x + 2(1)^n + (1)^2 x - 5 \times 1 \times x - 8$$

$$= x + 2 + x - 5x - 8 = -3x - 6$$

۱۹- گزینه ۲ چون باقی‌مانده $f(x)$ بر $x^2 - 1$ برابر $x + 6$ است داریم:

$$f(x) = (x^2 - 1)q(x) + x + 6 \Rightarrow f(-1) = 0 - 1 + 6 = 5$$

همچنین چون باقی‌مانده $f(x)$ بر $x^2 - 9$ برابر $x - 4$ است داریم:

$$f(x) = (x^2 - 9)q'(x) + x - 4 \Rightarrow f(3) = 0 + 3 - 4 = -1$$

اگر باقی‌مانده $f(x)$ بر $x^2 - 2x - 3$ عبارت‌ی درجه اول بصورت $ax + b$ باشد، داریم:

$$f(x) = (x^2 - 2x - 3)q''(x) + ax + b = (x - 3)(x + 1)q''(x) + ax + b \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 \xrightarrow{(1)} f(3) = 0 + 3a + b \rightarrow 3a + b = -1 \\ x = -1 \xrightarrow{(1)} f(-1) = 0 - a + b \rightarrow -a + b = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = -1 \\ a - b = -5 \end{cases}$$

$$4a = -6 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$a - b = -5 \Rightarrow b = a + 5 = -\frac{3}{2} + 5 = \frac{7}{2} \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$$

www.my-dars.ir

۲۰- گزینه ۳

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 1 = (x - 2)^3 + 1$$

۹. برای یافتن f^{-1} باید x را برحسب y حل کنیم.

$$(x - 2)^3 + 1 = y \Rightarrow (x - 2)^3 = y - 1 \Rightarrow x - 2 = \sqrt[3]{y - 1} \Rightarrow x = 2 + \sqrt[3]{y - 1}$$

$$y = f^{-1}(x) = 2 + \sqrt[3]{x - 1}$$

$$g(x) = \sqrt[3]{x} \xrightarrow{x \rightarrow x-1} y = \sqrt[3]{x-1} \rightarrow f^{-1}(x) = 2 + \sqrt[3]{x-1}$$

برای رسم f^{-1} باید نمودار $g(x) = \sqrt[3]{x}$ را یک واحد به راست و دو واحد به بالا منتقل کنیم.



مای دررس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir