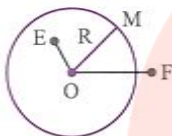


دایره

مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که فاصله‌اش از نقطه‌ی ثابتی واقع در آن صفحه مقدار معلومی باشد دایره نامیده می‌شود. دایره را با حرف بزرگ نمایش می‌دهند مثلاً شکل مقابل دایره‌ای به مرکز O و شعاع R است که با نماد $C(O, R)$ نشان داده می‌شود.

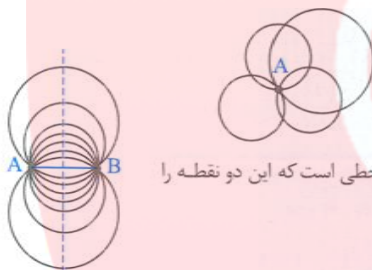


داخل دایره: مکان هندسی نقاطی که فاصله‌ی آن‌ها تا مرکز دایره از شعاع دایره کم‌تر است، داخل دایره نامیده می‌شود ($OE < R$).

بیرون دایره: مکان هندسی نقاطی که فاصله‌ی آن‌ها تا مرکز دایره از شعاع دایره بیش‌تر است، بیرون دایره نامیده می‌شود ($OF > R$).

چند نکته‌ی ساده:

۱) بر هر نقطه‌ی صفحه بی‌نهایت دایره می‌گذرد.



۲) از دو نقطه‌ی متمایز نیز بی‌نهایت دایره می‌گذرد و مکان هندسی مرکز این دایره‌ها عمودمنصف پاره‌خطی است که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند.

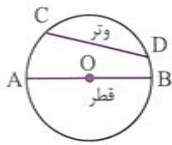
تمرین: بنظر شما از سه نقطه‌ی غیر واقع بر یک خط چند دایره می‌گذرد؟

مای دررس

گروه آموزشی عصر

تمرین: درباره‌ی تعداد دایره‌هایی که از سه نقطه‌ی واقع بر یک خط می‌گذرند، بحث کنید.

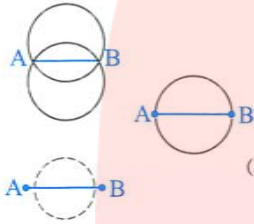
www.my-dars.ir



وتر دایره: پاره‌خطی که دو نقطه‌ی متمایز از یک دایره را به هم وصل می‌کند وتر دایره نامیده می‌شود. وتری که از مرکز دایره بگذرد قطر دایره نامیده می‌شود. هر قطر، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم می‌کند که نیم‌دایره نامیده می‌شوند.

مثال: از دو نقطه‌ی A و B که به فاصله‌ی ۵ واحد از هم هستند، چند دایره به شعاع ۳ می‌گذرد؟

حل: از دو نقطه همان‌طور که گفتیم بی‌نهایت دایره (البته با شعاع‌های مختلف) می‌گذرد، ولی اگر فاصله‌ی دو نقطه و شعاع دایره معلومی باشند، جواب حداکثر ۲ خواهد بود به‌طوری‌که:



۱) اگر قطر بزرگ‌تر از AB باشد، آن‌گاه دو دایره از A و B می‌گذرد. (AB وتری از دایره است)

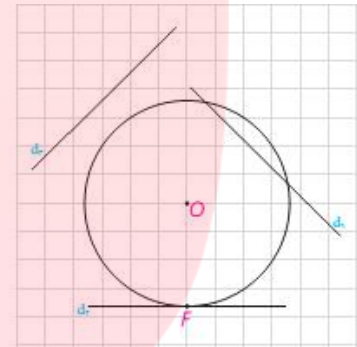
۲) اگر قطر مساوی AB باشد، آن‌گاه یک دایره از A و B می‌گذرد. (AB قطر دایره است)

۳) اگر قطر کوچک‌تر از AB باشد، آن‌گاه هیچ دایره‌ای از A و B نمی‌گذرد. (AB نمی‌تواند وتر یا قطر دایره باشد)

اکنون قطر دایره $2R = 6$ می‌باشد و $AB < 6$ است، پس دو دایره از A و B می‌گذرد که شعاع آن‌ها ۳ باشد.

■ اوضاع نسبی خط و دایره

در پایه‌های قبل با اوضاع نسبی خط و دایره تا حدودی آشنا شدید و دیدید که یک خط و یک دایره می‌توانند یک یا دو نقطه اشتراک داشته، و یا هیچ نقطه اشتراکی نداشته باشند. در حالتی که خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک باشند، اصطلاحاً گفته می‌شود خط بر دایره مماس است و در حالتی که خط و دایره دو نقطه اشتراک داشته باشند، خط و دایره را متقاطع می‌نامند. در این حالت خط را نسبت به دایره قاطع می‌نامیم.

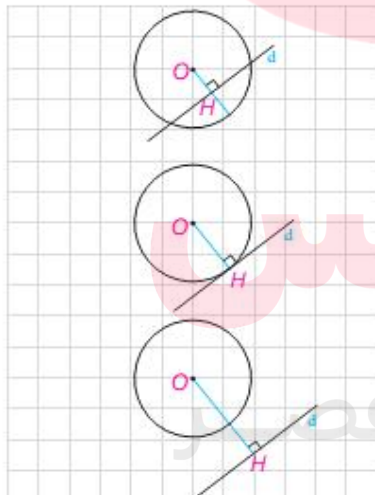


اگر d یک خط و $C(O, r)$ یک دایره و نقطه H پای عمودی باشد که از نقطه O به خط d رسم می‌شود، موارد زیر را کامل کنید.

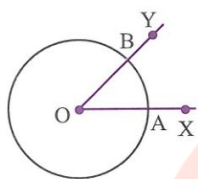
الف) اگر فاصله خط d از مرکز دایره از شعاع کمتر باشد ($OH < r$)، خط و دایره نقطه اشتراک دارند؛ یعنی متقاطع اند

ب) اگر فاصله خط از مرکز دایره با شعاع برابر باشد ($OH = r$)، خط و دایره نقطه اشتراک دارند؛ یعنی

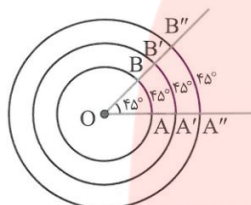
پ) اگر فاصله خط از مرکز دایره از شعاع بزرگ‌تر باشد ($OH > r$)، خط و دایره



زاویه مرکزی

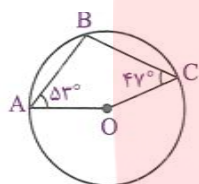


زاویه مرکزی: زاویه‌ای است که رأس آن مرکز دایره باشد. در شکل مقابل \widehat{XOY} یک زاویه مرکزی است. اگر A و B دو سر یک قطر نباشند زاویه مرکزی دایره را به دو کمان کوچک و بزرگ \widehat{AB} تقسیم می‌کند.



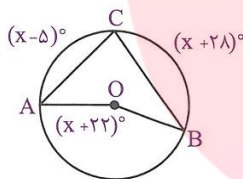
اندازه زاویه مرکزی: اندازه زاویه مرکزی برابر است با اندازه کمان روبه‌رو به آن بر حسب درجه و به بزرگی و کوچکی دایره بستگی ندارد. در شکل مقابل همه کمان‌های \widehat{AB} ، $\widehat{A'B'}$ و $\widehat{A''B''}$ به اندازه 45° می‌باشند.

مثال:



در شکل روبه‌رو، O مرکز دایره، $\widehat{A} = 53^\circ$ و $\widehat{C} = 47^\circ$ است. اندازه زاویه \widehat{AOC} چند درجه است؟

مثال:

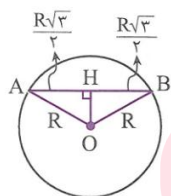
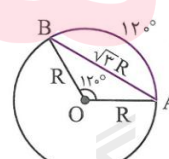
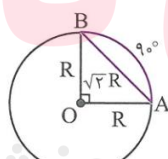
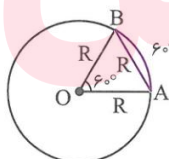


اگر در شکل روبه‌رو O مرکز دایره باشد، آن‌گاه اندازه کمان \widehat{AB} چند درجه است؟

- ۱۳۵ (۱)
- ۱۲۱ (۲)
- ۱۰۸ (۳)
- ۱۲۷ (۴)

وترهای خاص در دایره

در دایره به شعاع R اگر اندازه وتر AB برابر R یا $R\sqrt{2}$ یا $R\sqrt{3}$ باشد، آن‌گاه اندازه کمان \widehat{AB} برابر 60° یا 90° یا 120° است و بالعکس.



اثبات: مثلاً برای $AB = R\sqrt{3}$ ، ارتفاع وارد بر قاعده مثلث متساوی‌الساقین AOB را رسم می‌کنیم:

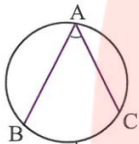
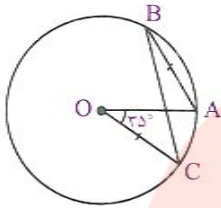
$$OH^2 = OB^2 - BH^2 = R^2 - \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{3R^2}{4} = \frac{R^2}{4} \Rightarrow OH = \frac{R}{2} \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 120^\circ$$

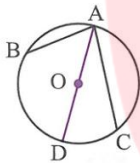
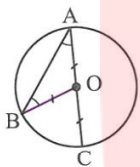
www.miy-dars.ir

مثال:

در شکل مقابل، O مرکز دایره و AB = OC و $\widehat{AOC} = 35^\circ$ است. اندازه‌ی زاویه‌ی BCO کدام است؟



کمان روبه‌رو به زاویه‌ی محاطی



زاویه‌ی محاطی

زاویه‌ی محاطی: زاویه‌ای که رأسش روی دایره و ضلع‌هایش دو وتر از دایره باشند، زاویه‌ی محاطی نامیده می‌شود.

ویژگی زاویه‌ی محاطی: اندازه‌ی هر زاویه‌ی محاطی برابر نصف اندازه‌ی کمان مقابل به آن است.

اثبات: (آ) فرض کنیم یک ضلع زاویه قطر دایره باشد.

$$\left. \begin{aligned} OB = OA &\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} \\ \widehat{BOC} = \widehat{A} + \widehat{B} &\Rightarrow \widehat{BOC} = 2\widehat{A} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{\widehat{BOC}}{2} \end{aligned} \right\}$$

اما $\widehat{BOC} = \widehat{BC}$ زاویه‌ی مرکزی است پس با کمان BC برابر است لذا $\widehat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$

(ب) فرض کنیم مرکز دایره بین دو ضلع زاویه‌ی محاطی باشد، قطر AD را رسم می‌کنیم، بنابه قسمت (آ) داریم:

$$\widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC} = \frac{\widehat{BD}}{2} + \frac{\widehat{CD}}{2} = \frac{\widehat{BD} + \widehat{CD}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

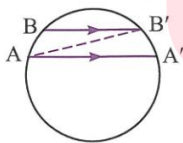
(پ) فرض کنیم دو ضلع زاویه‌ی محاطی یک طرف مرکز دایره باشند، قطر AD را رسم می‌کنیم طبق قسمت (آ) داریم:

$$\widehat{BAC} = \widehat{DAC} - \widehat{DAB} = \frac{\widehat{CD}}{2} - \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

رابطه‌ی کمان‌های محصور بین دو وتر موازی

در هر دایره کمان‌های محصور بین دو وتر موازی با هم برابرند.

اثبات:



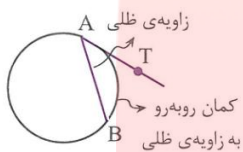
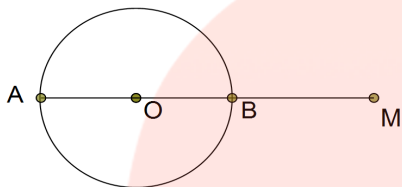
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

عکس قضیه فوق نیز صادق است. یعنی اگر کمان‌های محصور بین دو وتر برابر باشند، آن دو وتر برابرند.

اثبات:

بیشترین و کمترین فاصله ی یک نقطه خارج دایره از نقاط دایره: مطابق شکل اگر نقطه M خارج از دایره C باشد، آنگاه بیشترین فاصله ی M از نقاط دایره برابر MA و کمترین فاصله آن برابر MB است.



(نهایی- شهریور ۹۲- فررداد ۹۰)

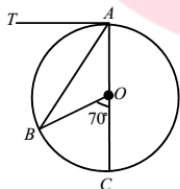
زاویه ی ظلی

زاویه‌ای که رأسش روی دایره بوده و یک ضلعش دایره را قطع می‌کند و ضلع دیگرش بر دایره مماس است، زاویه ی ظلی نامیده می‌شود.

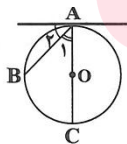
ویژگی زاویه ی ظلی: اندازه ی هر زاویه ی ظلی برابر است با نصف اندازه ی کمان روبه‌رو به آن.

اثبات:

تمرین: زاویه ی TAB چند درجه است؟



تست:



در شکل مقابل اندازه ی زاویه ی ظلی A برابر 5° است. اندازه ی کمان BC بر حسب درجه کدام

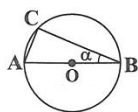
است؟

- (۱) 70° (۲) 75° (۳) 80° (۴) 85°

مثلث ABC در یک دایره محاط است و اندازه ی کمان‌های AB و BC و AC به ترتیب $x + 75^\circ$ و $x + 7^\circ$ و $2x - 22^\circ$ است.

اندازه ی یکی از زاویه‌های داخلی مثلث بر حسب درجه کدام است؟

- (۱) $57/7^\circ$ (۲) 59° (۳) 60° (۴) 64°



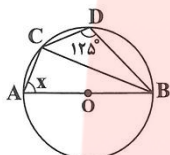
در شکل روبه‌رو $\widehat{BC} = \widehat{AC}$ می‌باشد و O مرکز دایره است. زاویه‌ی α کدام است؟

۱۸° (۲)

۲۲/۵° (۱)

۲۰° (۴)

۱۵° (۳)



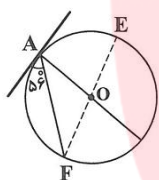
در شکل مقابل O مرکز دایره است، زاویه‌ی x کدام است؟

۴۵° (۲)

۶۵° (۱)

۷۵° (۴)

۵۵° (۳)



- در شکل مقابل، O مرکز دایره و زاویه‌ی A برابر 56° است. کمان \widehat{AE} چند درجه است؟ (سراسری ریاضی ۷۱)

۶۶° (۲)

۶۸° (۱)

۶۲° (۴)

۶۴° (۳)

مرکز دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر، رأس C از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است و دایره از دو رأس دیگر مثلث

می‌گذرد، امتداد ضلع AC، دایره را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. اندازه‌ی زاویه‌ی \widehat{ADB} کدام است؟

۹۰° (۴)

۶۰° (۳)

۳۰° (۲)

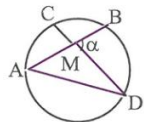
۱۵° (۱)

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

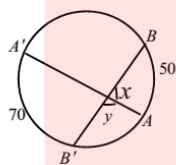
زاویه بین مماسها و وترها در دایره

آ) زاویه بین دو وتر متقاطع در یک دایره: اندازه زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می‌شود، برابر نصف مجموع اندازه‌ی دو کمانی از دایره است که به ضلع‌ها و امتداد ضلع‌های آن زاویه محدودند.



اثبات:

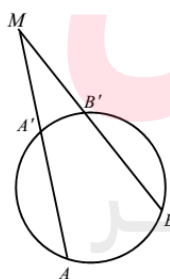
تمرین: x, y را بیابید.



ب) زاویه بین امتداد دو وتر: اندازه زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از یک دایره پدید می‌آید برابر قدرمطلق نصف تفاضل اندازه‌ی کمان‌هایی از آن دایره است که به ضلع‌های آن زاویه محدودند.

اثبات:

تمرین: اندازه زاویه M را در هر یک از حالات زیر به دست آورید.



الف) $\widehat{A'B'} = 80^\circ, \widehat{AB} = 120^\circ$

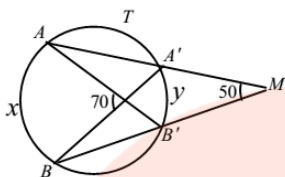
ب) $\widehat{AB} - \widehat{A'B'} = 30^\circ$

ج) $\widehat{AB} = \widehat{A'B'} + 60^\circ$

د) $\widehat{A'B'} = \frac{BB'}{4} = \frac{AB}{3} = \frac{AA'}{2}$

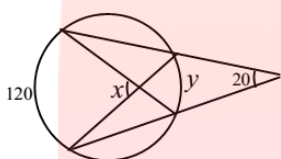
www.my-dars.ir

تمرین: x, y را به دست آورید.

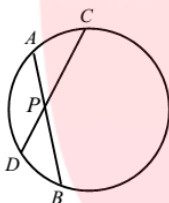


تمرین

- در شکل زیر مقدار $x + y$ چقدر است؟



در شکل زیر $AC = 2x^\circ$, $BD = 3x^\circ$, $CPB = 5x^\circ$ است. x را به دست آورید.



توجه: در حالت خاص، اگر یکی از وترها تبدیل به مماس شود، باز هم قضیه‌ی فوق برقرار است:

$$\alpha = \frac{|\widehat{TB} - \widehat{TA}|}{2}$$

اثبات:

مای درس

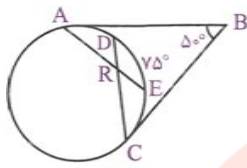
گروه آموزشی عصر

(ت) اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو مماس: اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو مماس بر دایره، برابر قدرمطلق نصف

تفاضل اندازه‌ی کمان‌هایی از آن دایره است که به ضلع‌های آن زاویه محدودند.

www.my-dars.ir

اثبات:



مثال ۱: در شکل مقابل، AB و BC بر دایره مماس‌اند و $\widehat{B} = 50^\circ$ و $\widehat{DE} = 75^\circ$. اندازه‌ی

زاویه‌ی \widehat{ARC} کدام است؟

۱۵۰° (۲)

۱۵۵° (۱)

۱۵۲/۵° (۴)

۱۵۷/۵° (۳)

نکته‌ی کلیدی: اگر اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو مماس مرسوم از یک نقطه خارج دایره بر دایره برابر α باشد، آن‌گاه اندازه‌ی کمان‌های ایجاد شده روی دایره به ترتیب $180^\circ - \alpha$ و $180^\circ + \alpha$ است.

اثبات:

مثال ۱: از نقطه‌ی M دو مماس MA و MB بر یک دایره رسم شده است. اگر C نقطه‌ای روی کمان کوچک \widehat{AB} باشد به طوری که

$\widehat{ACB} = 2\widehat{M}$ ، آن‌گاه اندازه‌ی زاویه‌ی \widehat{M} چند درجه است؟

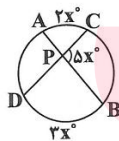
۳۲ (۴)

۳۴ (۳)

۳۶ (۲)

۳۰ (۱)

تست:



در شکل مقابل $\widehat{AC} = 2x^\circ$ و $\widehat{BD} = 3x^\circ$ و $\widehat{CPB} = 5x^\circ$ ، مقدار x چند درجه است؟

۲۴° (۲)

۲۰° (۱)

۳۶° (۴)

۳۳° (۳)

گروه آموزشی عصر

(سراسری ریاضی ۸۶)

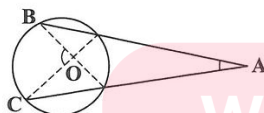
در شکل مقابل $\widehat{A} = 27^\circ$ و $\widehat{O} = 71^\circ$ ، کمان \widehat{BC} چند درجه است؟

۱۰۰° (۲)

۹۸° (۱)

۱۰۴° (۴)

۱۰۳° (۳)



www.my-dars.ir



در شکل مقابل M وسط کمان EF است و $BC = 50^\circ$ ، اندازه‌ی $B + D$ چند درجه

(سراسری ریاضی ۷۷)

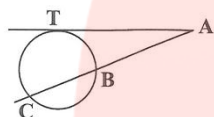
است؟

۱۷۵° (۲)

۱۶۰° (۱)

۲۳۰° (۴)

۱۸۰° (۳)



(آزاد ریاضی ۸۴)

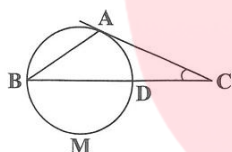
در شکل، AT مماس و $\widehat{BC} = \widehat{CT} = \widehat{BT}$ ، زاویه‌ی A چند درجه است؟

۷۲° (۲)

۱۸° (۱)

۱۴۴° (۴)

۳۶° (۳)



در شکل مقابل مماس AC بر دایره، با وتر AB از دایره برابری. اگر کمان \widehat{DMB} برابر ۲۲۲ درجه

(سراسری ریاضی فارغ از کشور ۹۱)

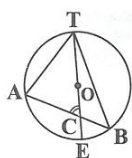
باشد، زاویه‌ی C چند درجه است؟

۲۴ (۴)

۲۳ (۳)

۲۲ (۲)

۲۱ (۱)



در شکل مقابل O مرکز دایره و $\widehat{A} = 65^\circ$ و $\widehat{B} = 35^\circ$ ، زاویه‌ی C چند درجه

(سراسری ریاضی ۸۱)

است؟

۶۱° (۲)

۶۰° (۱)

۶۳° (۴)

۶۲° (۳)

محیط و مساحت در دایره

۱) مساحت دایره‌ای به شعاع R برابر است با:

$$S = \pi R^2$$

۲) مساحت قطاع α° از دایره به شعاع R برابر است با:

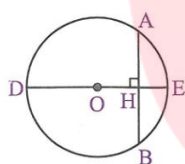
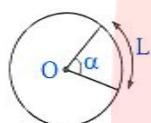
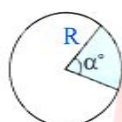
$$S = \frac{\alpha}{360} (\pi R^2)$$

۳) محیط دایره‌ای به شعاع R برابر است با:

$$P = 2\pi R$$

۴) طول کمان α° از دایره‌ای به شعاع R برابر است با:

$$L = \frac{\alpha}{360} (2\pi R)$$



← **رابطه‌ی قطر عمود بر وتر در دایره**

قضیه: در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.

$$DE \perp AB \Rightarrow \begin{cases} \overline{AH} = \overline{BH} \\ \overline{AE} = \overline{BE} \\ \overline{AD} = \overline{BD} \end{cases}$$

اثبات:

مای دررس

تمرین: روش رسم دایره‌ای که سه نقطه‌ی متمایز A ، B و C از آن را در اختیار داریم، شرح دهید.

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

مثال:

از نقطه M واقع در خارج دایره‌ای به شعاع ۴ واحد، دو مماس MA و MB بر دایره رسم شده است. اگر فاصله‌ی نقطه‌ی M تا نزدیک‌ترین نقاط دایره $(\sqrt{2}-1) \cdot 4$ باشد، فاصله‌ی مرکز دایره از وتر AB کدام است؟

(سراسری ریاضی- ۸۸)

۲ (۴)

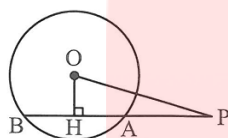
 $2\sqrt{2}$ (۳)

۳ (۲)

 $\sqrt{2}$ (۱)

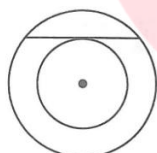
مثال:

در شکل مقابل، $AB=6$ و $OH=1$ و $\widehat{OHA} = 90^\circ$ ، شعاع دایره چه قدر است؟ (سراسری ریاضی- ۷۶)

 $\sqrt{12}$ (۲) $\sqrt{13}$ (۱) $\sqrt{10}$ (۴) $\sqrt{11}$ (۳)

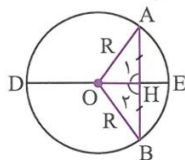
مثال:

شعاع‌های دو دایره‌ی هم‌مرکز ۶ و ۱۰ سانتی‌متر هستند. اندازه‌ی وتری از دایره‌ی بزرگ‌تر را که بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس است، پیدا کنید. (نهایی- شهریه ۹۱)



عکس قضیه‌ی فوق درست است و دو حالت دارد:

(۱) در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از آن دایره که از مرکز دایره نگذشته باشد، وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است.



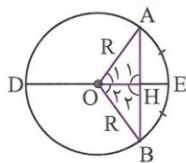
گروه آموزشی عصر

اثبات:

www.my-dars.ir

۲) در هر دایره خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر از آن دایره وصل می کند بر آن وتر عمود است.

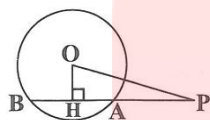
اثبات:



مثال:

(سراسری ریاضی ۷۶)

در شکل مقابل $AB = 6$ و $OH = 1$ و $\widehat{OHA} = 90^\circ$ شعاع دایره چه قدر است؟



۲) $\sqrt{12}$

۱) $\sqrt{13}$

۴) $\sqrt{10}$

۳) $\sqrt{11}$

در دایره‌ی با شعاع ۱۲، طول وتری که عمود منصف شعاعی از دایره باشد، چه قدر است؟

۴) $12\sqrt{3}$

۳) $6\sqrt{3}$

۲) ۲۷

۱) $3\sqrt{13}$

۱) در یک دایره، نقطه‌ی C روی وتر AB آن را به دو باره خط به طول‌های ۲ و ۱۴ سانتی‌متر تقسیم کرده است. اگر فاصله‌ی این نقطه تا مرکز دایره ۱۰ سانتی‌متر باشد، مساحت دایره کدام است؟

۴) 108π

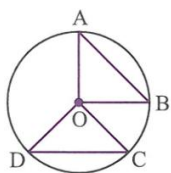
۳) 64π

۲) 128π

۱) 72π

خواص وترهای مساوی در دایره

۱) در یک دایره (یا دو دایره با شعاع‌های مساوی) کمان‌های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند و بالعکس.



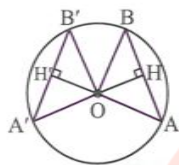
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

اثبات:

(نهایی- شهریور ۸۵)

۲) در یک دایره (یا دو دایره با شعاع‌های مساوی) وترهای متساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و بالعکس.



اثبات:

مثال: اندازه‌ی دو وتر در یک دایره $4x+4$ و $3x+9$ سانتی‌متر است. اگر کمان‌های نظیر دو وتر برابر باشد در صورتی که فاصله‌ی مرکز دایره تا وسط یکی از وترها برابر ۵ باشد آن‌گاه طول شعاع دایره کدام است؟

۱۴/۴

۱۳/۳

۱۲/۲

۱۰/۱

← خواص وترهای نامساوی در دایره

(نهایی- دی ۹۰- فرورد ۸۹، ۸۶ و ۸۴)

۱) در یک دایره، از دو وتر نابرابر آن که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است و بالعکس.

اثبات:

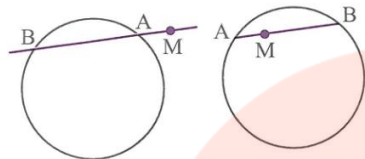
۲) کوچک‌ترین وتری که از یک نقطه واقع در درون یک دایره می‌توان رسم کرد، وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه عمود است.

اثبات:

مثال: اگر M نقطه‌ای داخل دایره $C(O, 10)$ باشد و $OM = 5$ باشد، طول کوتاهترین و بزرگترین وتری که از M می‌گذرد چند است؟

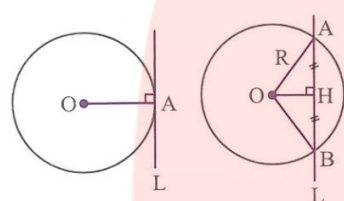
www.my-dars.ir

خطهای قاطع و مماس نسبت به دایره



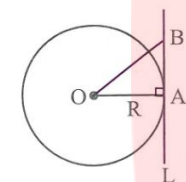
خط قاطع: هر خط که دایره را در دو نقطه قطع کند، خط قاطع نامیده می‌شود. اگر از نقطه‌ی M واقع در صفحه‌ی یک دایره، خطی رسم شده و دایره را در دو نقطه‌ی A و B قطع کند پاره‌خطهای MA و MB دو قطعه‌ی قاطع نامیده می‌شوند.

خط مماس: خطی که دایره را در یک نقطه قطع کند، خط مماس نامیده می‌شود و خواص آن به شرح زیر است:
(آ) خط مماس بر دایره همواره در نقطه‌ی تماس بر شعاع دایره عمود است.



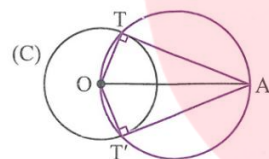
اثبات: فرض کنیم خط L در نقطه‌ی A بر دایره‌ی $C(O, R)$ مماس است. فرض کنیم خط L بر OA عمود نباشد در این صورت عمود OH را بر L رسم می‌کنیم و پاره‌خط BH را روی L به اندازه‌ی AH رسم می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی AOH و BOH به حالت (ض‌ض) هم‌نهشت‌اند پس $OB = OA = R$. یعنی B روی دایره قرار دارد. در این صورت L دایره را به جای یک نقطه در دو

نقطه قطع می‌کند که با فرض مماس بودن آن تناقض دارد. پس $OA \perp L$.
(ب) خطی که در انتهای یک شعاع بر آن عمود باشد، بر دایره مماس است.



اثبات: فرض کنیم خط L در انتهای شعاع OA بر آن عمود باشد، B را نقطه‌ای دیگر از خط L در نظر می‌گیریم در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AOB داریم $OB > OA$ یا $OB > R$ و این یعنی B خارج دایره قرار دارد و خط L فقط در نقطه‌ی A دایره را قطع می‌کند پس L بر دایره مماس است.

رسم خط مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج آن



نقطه‌ی A را خارج دایره‌ی $C(O, R)$ در نظر می‌گیریم، O را به A وصل می‌کنیم. دایره‌ای به قطر OA رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی آن با دایره‌ی (C) را T و T' می‌نامیم. زوایای OTA و $OT'A$ روبه‌رو به قطرند پس قائمه‌اند. در نتیجه AT و AT' در نقاط T و T' بر دایره‌ی (C) مماس‌اند و با فرض $OA > R$ مسأله همواره دو جواب دارد.

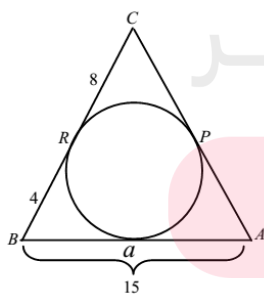
(نهایی) - شهریور ۹۳ و ۸۷ - فرداد (۹۱)

(پ) از هر نقطه خارج دایره دو مماس بر دایره می‌توان رسم کرد که هم‌اندازه‌اند.

اثبات:

مای دارس

تمرین: در شکل زیر اضلاع مثلث بر دایره مماسند. طول ضلع AC را بیابید.



گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

مثال:

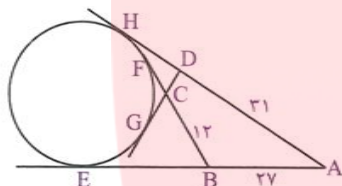
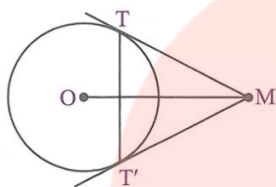
دایره‌ی $C(O, 4)$ و نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۸ سانتی‌متر از مرکز این دایره را در نظر بگیرید، خط‌های MT و MT' بر این دایره مماس‌اند (T و T' نقطه‌های تماس‌اند).

(نهایی - شهریور ۸۸)

آ) طول مماس‌های MT و MT' را به دست آورید.

ب) طول وتر TT' را به دست آورید.

پ) اندازه‌ی زاویه‌ی TMT' و نوع مثلث MTT' را تعیین کنید.



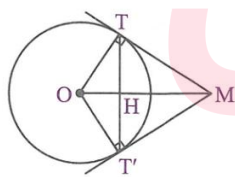
مثال: در شکل مقابل، AE, AH, BF و DG بر دایره مماس‌اند و $AB = 27, BC = 12$

و $AD = 31$ است. اندازه‌ی CD کدام است؟

- (۱) ۶
(۲) ۷
(۳) ۸
(۴) ۹

خواص دو مماس رسم شده بر یک دایره‌ی معلوم از یک نقطه خارج آن

در شکل مقابل، MT و MT' در نقطه‌های T و T' بر دایره‌ی $C(O, R)$ مماس‌اند و H نقطه‌ی برخورد وتر TT' با OM است. ثابت کنید:



آ) OM نیمساز زاویه‌های TMT' و TOT' است.

ب) OM عمودمنصف پاره‌خط TT' است.

پ) $OH \cdot OM = R^2$

ت) $TT'^2 = 4OH \cdot HM$

ث) $TT' \cdot OM = 2R \cdot MT$

اثبات آ)

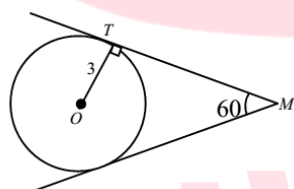
www.my-dars.ir

اثبات ب)

اثبات پ)

اثبات ت)

اثبات ث)

مثال: در شکل زیر طول مماس MT چقدر است؟

مثال:

دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۸ و ۱۲ مقروض‌اند. وتری از دایره‌ی بزرگ‌تر مماس بر دایره‌ی کوچک‌تر است. اگر دو مماس مرسوم از دو سر این وتر بر دایره‌ی بزرگ‌تر در نقطه‌ی M متقاطع باشند، آن‌گاه فاصله‌ی M تا مرکز دایره‌ها کدام است؟

گروه آموزشی عصر

۱۶ (۲)

۱۸ (۱)

۱۹ (۴)

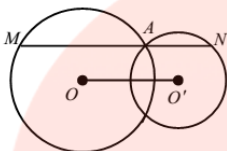
۱۷ (۳)

www.my-dars.ir

تکلیف:

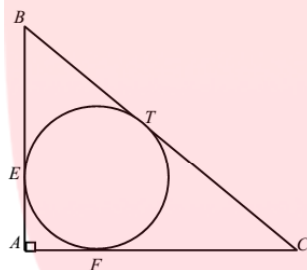
۱- دو دایره $C(0,4)$ ، $C'(0',3)$ مفروضند. اگر $oo' = 5$ باشد و از نقطه ی تقاطع دو دایره خطی موازی oo' رسم کنیم تا آنها را در N, M قطع کند

MN را بدست آورید :

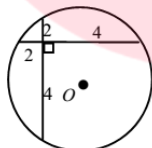


۲- اگر فاصله ی وتر AB از مرکز دایره ی $C(0,26)$ برابر ۱۰ باشد، طول وتر AB را بدست آورید .

۳- در مثلث قائم الزاویه زیر $AC = 4$ ، $AB = 3$ است . طول CT چقدر است ؟



۴- در شکل روبرو شعاع دایره را بدست آورید .



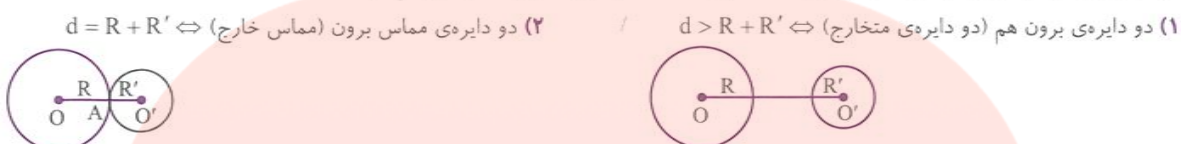
۵- دو دایره ی هم مرکز اند و شعاع آنها $r_1 = 4$ ، $r_2 = 5$ است. طول قاطعی که دو دایره را قطع می کند در دایره بزرگ تر ۸ است طول بخشی از آن که در دایره ی کوچکتر قرار دارد چقدر است؟

۶- نقطه M به فاصله ۲ از مرکز دایره $C(0,4)$ قرار گرفته است . طول کوتاهترین وتر گذرنده از M چقدر است؟

www.my-dars.ir

وضع دو دایره نسبت به هم

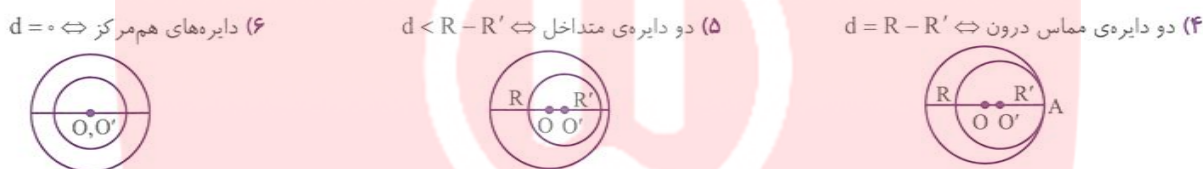
دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ با فرض $d > R + R'$ به صورت زیر دسته بندی می شوند:



نکته: لازم به ذکر است که نقاط O, A, O' روی یک امتدادند، زیرا OA و $O'A$ بر خط مماس بیرون دو دایره در نقطه A عمودند.



نکته: در دو دایره متقاطع، خط المکرزین دو دایره همواره عمود منصف وتر مشترک آنهاست. زیرا مطابق شکل هر یک از نقاط O و O' از دو سر پاره خط AB به یک فاصله اند.



نتیجه:

اگر R و r طول شعاع های دو دایره باشد (که $R \geq r$) و d طول خط المکرزین باشد، آن گاه:

وضعیت	$d > R + r$	$d = R + r$	$R - r < d < R + r$	$d = R - r$	$d < R - r$
تعداد مماس مشترک	۴	۳	۲	۱	صفر
	متخارج	مماس خارج	متقاطع	مماس داخل	متداخل

مثال: وضعیت دایره ها را در هر قسمت مشخص کنید.

(۱) $oo' = 2, R' = 4, R = 8$

(۲) $oo' = 3, R' = 3, R = 6$

(۳) $oo' = 10, R' = 2, R = 7$

(۴) $oo' = 16, R' = 6, R = 10$

(۵) $oo' = 5, R' = 3, R = 6$

تمرین

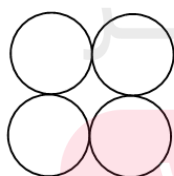
۱- سه دایره $C_1(o,5)$, $C_2(o',1)$, $C_3(o'',2)$ در یک امتداد مفروض اند. اگر $oo''=6$, $oo'=3$ باشد، دو دایره C_2, C_3 چه وضعی نسبت به هم دارند؟

۲- در دو دایره به شعاع های $R_1=4$, $R_2=3$ و طول خط مرکزین $d=\sqrt{2}-1$ مفروض است. وضعیت دو دایره نسبت به هم چگونه است؟

۳- دو دایره به مرکزهای o, o' و شعاع های ۱ و ۳ مماس داخل اند. مساحت مربعی به قطر oo' چقدر است؟

۴- دو دایره به شعاع های ۹ و ۱۲ مماس دورنی اند. اندازه ی بزرگ ترین قطعه مماس که یک سر آن بر روی دایره بزرگ تر و سر دیگر آن بر دایره کوچک تر مماس باشد، چقدر است؟

۵- چهار دایره مساوی به شعاع r مطابق شکل برهم مماسند. شعاع دایره ای که با این چهار دایره مماس داخل است را به دست آورید.



گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

تست:

- تعداد مماس مشترک‌های دو دایره‌ی مساوی واقع در یک صفحه، کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) هر سه می‌تواند باشد
 (آزاد ریاضی خارج از کشور ۸۸)

- دو دایره به شعاع‌های $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{2}$ و به طول خط‌المركزین $d = 1$ ، چه وضعیتی دارند؟

- ۱ (۱) متقاطع
 ۲ (۲) متداخل
 ۳ (۳) متخارج
 ۴ (۴) مماس خارج

- دو دایره‌ی C_1 و C_2 به شعاع‌های $r_1 = \frac{1}{4}$ ، $r_2 = 3$ و طول خط‌المركزین $d = \frac{1}{4}$ هستند. چند دایره به شعاع واحد وجود دارد که بر هر دو دایره مماس است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

- دو دایره‌ی C_1 و C_2 به شعاع‌های $r_1 = \frac{1}{4}$ ، $r_2 = 3$ و طول خط‌المركزین $d = \frac{1}{4}$ هستند. چند دایره به شعاع واحد وجود دارد که بر هر دو دایره مماس است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

- در دو دایره به شعاع‌های $r_1 = 2$ ، $r_2 = 3$ و $d = \sqrt{2}$ (طول خط‌المركزین)، چند مماس مشترک وجود دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

- دو دایره C و C' به مرکزهای O و O' به شعاع‌های ۳ و ۵ به فاصله‌ی $OO' = 11$ مفروض‌اند، چند خط می‌توان رسم کرد که از O و O' به ترتیب به فاصله‌های ۳ و ۵ باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

- در دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳، طول خط‌المركزین $\sqrt{5}$ است. چند خط می‌توان رسم کرد که به هر دو دایره مماس باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

مماس مشترک‌های دو دایره

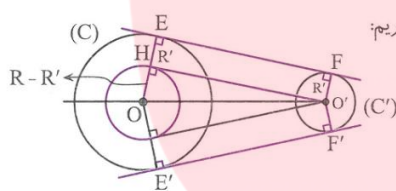
(آ) اگر خطی بر دو دایره مماس باشد و دو دایره یک طرف خط مماس باشند آن‌گاه آن خط را مماس مشترک خارجی دو دایره گویند. (خط Δ)
 (ب) اگر خطی بر دو دایره مماس باشد و دو دایره، دو طرف خط مماس باشند آن خط را مماس مشترک داخلی دو دایره گویند (خط Δ')



بنابراین قرارداد اندازه‌ی EF را طول مماس مشترک خارجی و اندازه‌ی CD را طول مماس مشترک داخلی دو دایره می‌نامند.

رسم مماس مشترک‌های دو دایره

(آ) رسم مماس مشترک خارجی دو دایره: دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ ($R > R'$) را در نظر می‌گیریم:



(۱) دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R - R'$ رسم می‌کنیم.

(۲) از نقطه‌ی O' مماس $O'H$ را بر دایره‌ی فوق رسم می‌کنیم.

(۳) O را به H وصل می‌کنیم و آن را امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی (C) را در نقطه‌ی E قطع کند.

(۴) مطابق شکل از نقطه‌ی O' خطی موازی OE رسم می‌کنیم تا دایره‌ی C' را در نقطه‌ی F قطع کند. EF مماس مشترک خارجی دو دایره است.

زیرا چهارضلعی $EFO'H$ مستطیل است ($\widehat{H} = 90^\circ$ و $EH = O'F = R'$) اگر O' خارج دایره‌ی به مرکز O و شعاع $R - R'$ باشد، مسأله همواره دو جواب دارد.

محاسبه‌ی طول مماس مشترک خارجی دو دایره: در شکل فوق در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OHO' داریم:

$$OO'^2 = OH^2 + O'H^2 \Rightarrow OO'^2 = (R - R')^2 + EF^2 \Rightarrow EF = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2}$$

با فرض این‌که طول خط‌المركزین دو دایره $OO' = d$ باشد، داریم:

$$EF = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

طول خط‌المركزین در دو دایره‌ی متقاطع به شعاع‌های ۴ و ۳ سانتی‌متر برابر ۶ سانتی‌متر است. طول مماس مشترک خارجی دو دایره را به‌دست آورید. (نهایی- فرداد ۹۰)

تست:

- اندازه‌ی مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۴ و ۶ واحد برابر ۱۵ واحد است. خط‌المركزین این دو دایره چند واحد است؟

(سناسری ریاضی ۹۱)

۴) $7\sqrt{6}$

۳) ۱۷

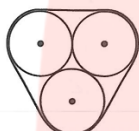
۲) ۱۸

۱) $12\sqrt{2}$

- دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۲ بر هم مماس خارج‌اند. طول مماس مشترک خارجی آن‌ها چه قدر است؟

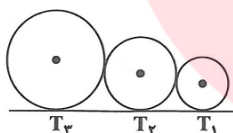
- (۱) ۳ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $\frac{7}{2}$

- در شکل مقابل، سه دایره به شعاع‌های R ، دو به دو بر هم مماسند، طول تسمه‌ای که دور آن‌ها پیچیده شده چه قدر است؟

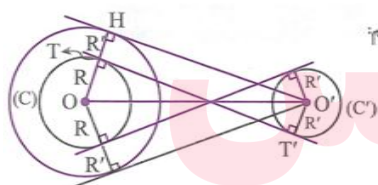


- (۱) $R(\pi + 3)$ (۲) $2R(\pi + 3)$
(۳) $2R(\pi + 2)$ (۴) $2R(\pi + 6)$

- سه دایره مطابق شکل بر هم مماس‌اند و مراکز آن‌ها روی یک خط راست است، اگر $r_1 = 1$ و $r_2 = 2$ باشد، شعاع دایره بزرگ‌تر چه قدر است؟



- (۱) ۳ (۲) ۴
(۳) ۶ (۴) $\frac{5}{2}$



ب) رسم مماس مشترک داخلی دو دایره: دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ ($R > R'$) را در نظر می‌گیریم:

(۱) به مرکز O و شعاع $R + R'$ یک دایره رسم می‌کنیم.

(۲) از نقطه O' مماس $O'H$ را بر دایره‌ی فوق رسم می‌کنیم.

(۳) OH را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن را با دایره‌ی (C) نقطه‌ی T می‌نامیم.

(۴) از نقطه‌ی O' خطی موازی OH رسم می‌کنیم تا دایره‌ی (C') را در نقطه‌ی T' قطع کند. خط TT' مماس مشترک داخلی دو دایره است

زیرا $\hat{T} = \hat{T}' = 90^\circ$ (چهارضلعی $O'T'TH$ مستطیل است چون $TH \parallel O'T' = R'$ و $\hat{H} = 90^\circ$). اگر O' خارج دایره‌ی به مرکز O و شعاع $R + R'$ باشد مسأله همواره دو جواب دارد.

محاسبه‌ی طول مماس مشترک داخلی دو دایره: با توجه به شکل فوق و با فرض $OO' = d$ در مثلث قائم‌الزاویه $OO'H$ داریم:

$$OO'^2 = OH^2 + O'H^2 \Rightarrow d^2 = (R + R')^2 + TT'^2 \Rightarrow TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

تست:

- دو دایره مساوی به شعاع ۵ متخارجند. اگر طول مماس مشترک داخلی آن‌ها برابر $4\sqrt{6}$ باشد، اندازه خط‌المركزین کدام است؟
(آزاد ریاضی صبیح ۹۱)

۱۲ (۱) ۱۴ (۲) ۱۶ (۳) ۱۵ (۴)

- دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۵ واحد مماس داخلی هستند. چند وتر به طول $4\sqrt{6}$ در دایره بزرگتر می‌توان رسم کرد که بر دایره کوچک‌تر مماس باشند؟
(سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۰)

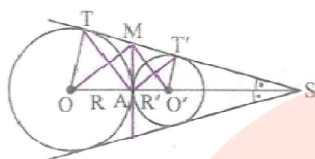
۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

- دو دایره به شعاع‌های $r_1 = 4$ ، $r_2 = 6$ و طول خط‌المركزین ۱۲ مفروضند. طول مماس مشترک داخلی آن‌ها چه قدر است؟
(آزاد ریاضی صبیح ۹۰)

۲ (۱) $2\sqrt{31}$ (۲) $\sqrt{11}$ (۳) $\sqrt{61}$ (۴) $2\sqrt{11}$

- در دو دایره به شعاع‌های $r_1 = 1$ و $r_2 = 3$ و طول خط‌المركزین $d = 6$ ، محل تلاقی مماس مشترک‌های داخلی چه فاصله‌ای از مرکز دایره کوچک‌تر دارد؟
(آزاد ریاضی عمر ۹۱)

۵ (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{7}{2}$ (۳) $\frac{9}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$



خواص دو دایره مماس خارج

فرض کنیم دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ مماس خارج باشند یعنی $d = R + R'$
 (۱) مماس مشترک داخلی، طول مماس مشترک خارجی را نصف می‌کند.

اثبات:

(۲) نقاط تماس مماس مشترک خارجی و نقطه‌ی تماس دو دایره رأس‌های یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند ($\widehat{TAT'} = 90^\circ$)

اثبات:

(۳) وسط مماس مشترک خارجی و مراکز دو دایره، رأس‌های یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند. ($\widehat{OMO'} = 90^\circ$)

اثبات:

(۴) طول مماس مشترک خارجی دو دایره واسطه‌ی هندسی دو قطر دایره است یعنی $TT'^2 = 2R \times 2R'$

اثبات:

مای درس

مثال: دو دایره به شعاع های ۷ و ۱۳ مماس خارج اند. فاصله ی نقطه ی تماس دو دایره را از مماس مشترک خارجی دو دایره بیابید.

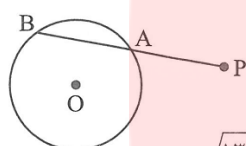
www.my-dars.ir

رابطه‌ی طولی در دایره

آ وترهای متقاطع: اگر دو وتر در یک دایره متقاطع باشند، آن‌گاه حاصل ضرب پاره‌خط‌های روی یکی با حاصل ضرب پاره‌خط‌های روی دیگری برابرند.

اثبات:

مثال:



فاصله‌ی نقطه‌ی P تا دورترین نقاط یک دایره سه برابر شعاع دایره است. از این نقطه، قاطع PAB نسبت به دایره رسم شده است، اگر کمان AB برابر ۶۰ درجه باشد، اندازه‌ی PA چند برابر شعاع است؟ (سراسری ریاضی فارغ از کشور - ۹۰)

$$\sqrt{13} - 2 \quad (4)$$

$$\sqrt{11} - 2 \quad (3)$$

$$\frac{1}{4}(\sqrt{13} - 1) \quad (2)$$

$$\frac{1}{4}(\sqrt{11} - 1) \quad (1)$$

مثال:

نقطه‌ی C بر روی وتر AB به طول ۹ واحد از دایره‌ای چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم کرده است. طول کوتاه‌ترین وتر از دایره، گذرنده از نقطه‌ی C کدام است؟

(سراسری ریاضی - ۸۲)

$$4\sqrt{5} \quad (4)$$

$$6\sqrt{2} \quad (3)$$

$$5\sqrt{3} \quad (2)$$

$$8 \quad (1)$$

مثال:

دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۱۲ واحد، مماس درونی‌اند، اندازه‌ی بزرگ‌ترین قطعه‌ی مماس که یک سر آن بر روی دایره‌ی بزرگ‌تر و سر دیگر آن (نقطه‌ی تماس) بر روی دایره‌ی کوچک‌تر باشد، برابر کدام است؟

(سراسری ریاضی - ۷۸)

$$8\sqrt{3} \quad (4)$$

$$12 \quad (3)$$

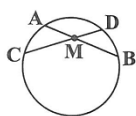
$$8\sqrt{2} \quad (2)$$

$$9 \quad (1)$$

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

مثال:



(آزاد ریاضی ۷۶)

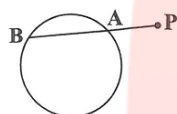
- در شکل مقابل $MA = 6$ و $MB = 3$ و $MD = 2/5$ ، طول MC کدام است؟

۶/۹ (۲)

۱۷/۸ (۱)

۷/۲ (۴)

۷ (۳)



در شکل مقابل $PA = 5$ و $AB = 3$ و شعاع دایره برابر ۴ واحد است، فاصله‌ی نقطه‌ی P تا مرکز دایره

(سراسری ریاضی ۷۷)

کدام است؟

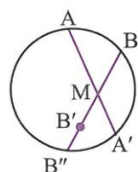
$3\sqrt{7}$ (۴)

$4\sqrt{7}$ (۳)

$2\sqrt{14}$ (۲)

$2\sqrt{21}$ (۱)

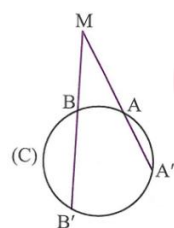
عکس قضیه‌ی وترهای متقاطع: اگر دو پاره‌خط متقاطع باشند به طوری که حاصل ضرب پاره‌خط‌های روی یکی با حاصل ضرب پاره‌خط‌های روی دیگری برابر باشند آن‌گاه از انتهای این پاره‌خط‌ها یک دایره می‌گذرد.



اثبات (روش کتاب درسی): بر سه نقطه‌ی A، B و A' یک دایره می‌گذرد (دایره‌ی محیطی مثلث ABA'). اگر این دایره از نقطه‌ی B' بگذرد حکم ثابت است در غیر این صورت این دایره، خط شامل MB را در نقطه‌ای دیگر مانند B'' قطع خواهد کرد، در این صورت خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} MA \cdot MA' &= MB \cdot MB'' \\ MA \cdot MA' &= MB \cdot MB' \end{aligned} \right\} \Rightarrow MB \cdot MB'' = MB \cdot MB' \Rightarrow MB'' = MB'$$

چون نقاط B' و B'' یک طرف نقطه‌ی M اند از تساوی اخیر نتیجه می‌شود B'' بر B' منطبق است که تناقض می‌باشد پس دایره‌ی مذکور از نقطه‌ی B' هم می‌گذرد یعنی چهار نقطه‌ی A، B، A' و B' روی یک دایره‌اند.



رابطه‌ی مولی برای وترهایی با امتدادهای متقاطع

(۱) مطابق شکل، اگر امتداد وترهای AA' و BB' از دایره‌ی (C) یکدیگر را در نقطه‌ی M قطع کنند (نهایی- دی ۹۰- شه‌ریور ۸۹) آن‌گاه:

$$MA \cdot MA' = MB \cdot MB'$$

اثبات:

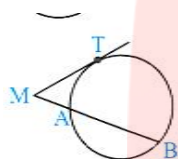
www.my-dars.ir

(۲) عکس (۱) هم درست است یعنی اگر امتداد دو پاره خط AA' و BB' یکدیگر را در نقطه‌ی M قطع کنند به طوری که $MA \cdot MA' = MB \cdot MB'$ ، آن گاه نقاط A, B, A', B' روی یک دایره قرار دارند.

اثبات: از شکل فوق استفاده می‌کنیم. بنابه فرض $MA \cdot MA' = MB \cdot MB'$ پس $\frac{MA}{MB} = \frac{MB'}{MA'}$ داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{MA}{MB} = \frac{MB'}{MA'} \\ \widehat{M} = \widehat{M} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{حالت دوم تشابه}} \triangle MAB' \sim \triangle MBA' \Rightarrow \widehat{A'} = \widehat{B'}$$

بنام این نقطه‌ی B' روی کمان درخور زاویه‌ی $\widehat{A'}$ روبه‌رو به پاره خط AB قرار دارد پس چهار نقطه‌ی A, B, A', B' روی یک دایره‌اند.

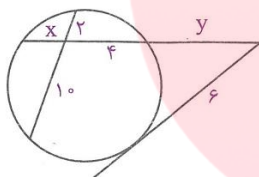


اگر از نقطه‌ی M خارج دایره، یک مماس و یک قاطع نسبت به یک دایره رسم کنیم، مطابق شکل داریم:

$$MT^2 = MA \cdot MB$$

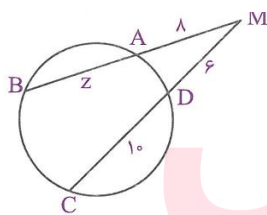
اثبات:

مثال:



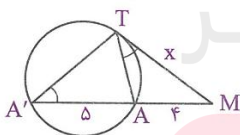
(نهایی- شهریور ۹۳)

در شکل زیر مقدارهای x و y را به دست آورید.



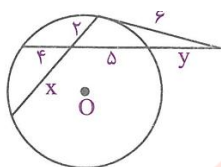
(نهایی- شهریور ۹۲)

با توجه به شکل، مقدار z را بیابید.



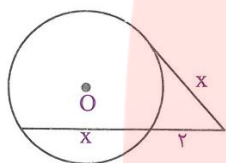
(نهایی- دی ۹۰)

مقدار x را در شکل زیر به دست آورید.



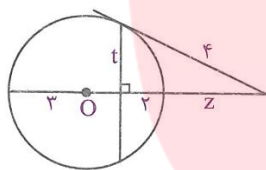
(نهایی- دی ۸۹)

با توجه به شکل، مقدار x و y را به دست آورید.



(نهایی- شهریور ۸۸)

در شکل مقابل مقدار x را به دست آورید.

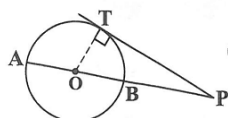


(نهایی- شهریور ۸۵)

در شکل مقابل مقدار t و z را به دست آورید.

تست:

در شکل مقابل نقطه‌ی O مرکز دایره و $PA = ۱۸$ و $PB = ۲$ است، مساحت مثلث OPT چه قدر است؟



(آزاد ریاضی ۷۸)

۲۶ (۲)

۱۲ (۱)

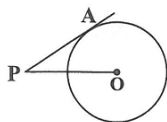
۲۰ (۴)

۲۴ (۳)

مای دررس

(سراسری ریاضی ۷۶)

در شکل مقابل $OP = ۵$ و شعاع دایره واحد است، طول PA کدام است؟



$۵\sqrt{۲}$ (۲)

$۶\sqrt{۲}$ (۱)

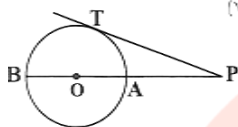
$۲\sqrt{۶}$ (۴)

$۲\sqrt{۵}$ (۳)

www.my-dars.ir

در شکل مقابل شعاع دایره ۶ و قطر AB و $PA = 4$ می‌باشد. طول مماس PT کدام

(سراسری ریاضی ۷۴)



است؟

(۲) $5\sqrt{2}$

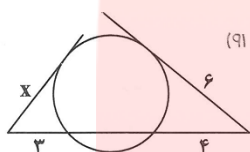
(۱) $4\sqrt{3}$

(۴) ۸

(۳) ۱۴

در شکل مقابل اندازهی x چند واحد است؟

(سراسری ریاضی ۹۱)



(۲) ۵

(۱) $3\sqrt{2}$

(۴) $2\sqrt{5}$

(۳) $2\sqrt{6}$

نقطه‌ی C بر روی وتر AB به طول ۹ واحد از دایره‌ای چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم کرده است. طول کوتاه‌ترین

(سراسری ریاضی ۸۶)

وتر از دایره گذرنده بر نقطه‌ی C کدام است؟

(۴) $4\sqrt{5}$

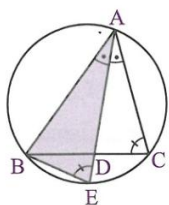
(۳) $6\sqrt{2}$

(۲) $5\sqrt{3}$

(۱) ۸

مای دررس

محاسبه‌ی طول نیمساز به کمک وترهای متقاطع



مطابق شکل نیمساز زاویه‌ی \hat{A} را امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی محیطی مثلث ABC را در نقطه‌ی E قطع کند.

(آ) مثلث ADC با مثلث ABE متشابه است.

(ب) $AB \cdot AC = AD \cdot AE$

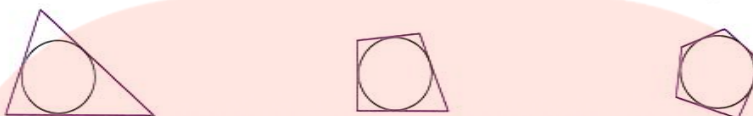
(پ) $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$

www.my-dars.ir

اثبات:

چندضلعی‌های محیطی

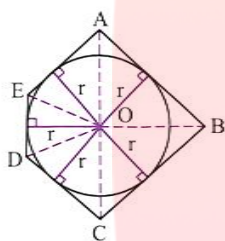
هر گاه همه‌ی ضلع‌های یک چندضلعی بر یک دایره مماس باشند، چندضلعی را محیطی یا محیط بر دایره می‌نامند.



شکل‌های فوق سه چندضلعی محیطی را نشان می‌دهند. مثلث همواره یک چندضلعی محیطی است زیرا نیمساز زوایای داخلی آن هم‌مسند و دایره‌ی مماس بر اضلاع آن، دایره‌ی محاطی داخلی مثلث نامیده می‌شود. چندضلعی‌های منتظم مانند مربع محیطی‌اند اما سایر چندضلعی‌ها ممکن است محیطی باشند یا نباشند.

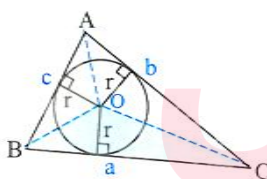
ویژگی مشترک چندضلعی‌های محیطی

(۱) یک چندضلعی محیطی است اگر و تنها اگر نیمسازهای زاویه‌های آن هم‌مسند باشند.
اثبات:



نتیجه: چون نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث هم‌مسند اند، پس هر مثلث محیطی است.

تمرین: با توجه به شکل زیر شعاع دایره محاطی مثلث را بر حسب محیط و مساحت مثلث بیان کنید.



(۲) مساحت هر چندضلعی محیطی برابر است با نصف محیط آن در شعاع دایره‌ی محاطی آن.
گروه آموزشی عصر

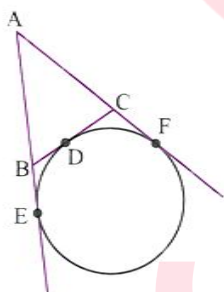
www.my-dars.ir

اثبات: از شکل قسمت (۱) استفاده می‌کنیم:

مثال: اندازه ی اضلاع مثلثی ۱۴، ۱۱ و ۱۵ است. اندازه ی پاره خط هایی را که دایره محاطی مثلث بر روی اضلاع مثلث ایجاد می کند، بیابید.

مثال: در یک مثلث قائم الزاویه، دایره ی محاطی داخلی، وتر را به دو پاره خط به طول های ۴ و ۶ تقسیم کرده است. مساحت این مثلث را بیابید.

دایره ی محاطی خارجی مثلث: به دایره ای گفته می شود که بر یک ضلع از مثلث و امتداد دو ضلع دیگر آن مماس باشد.



مثال:

در مثلثی به طول اضلاع ۵، ۷ و ۳ واحد، دایره ی محاطی خارجی بر ضلع متوسط و امتداد دو ضلع دیگر مماس است. نقطه ی تماس ضلع متوسط را به کدام نسبت تقسیم می کند؟

(سناریوی ریاضی - ۸۳)

$$\frac{2}{9} (4)$$

$$\frac{1}{5} (3)$$

$$\frac{1}{6} (2)$$

$$\frac{1}{9} (1)$$

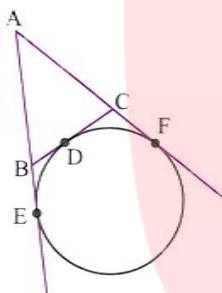
www.my-dars.ir

تمرین: شعاع دایره محاطی خارجی مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع ۳ را حساب کنید.

تمرین: طول خط مرکزین دایره های محاطی داخلی و خارجی مثلث متساوی الاضلاعی به اندازه ی ضلع a را حساب کنید.

تمرین:

مثلث ABC مفروض است. دایره ای بر ضلع BC در نقطه ی D و بر امتداد اضلاع AB و AC به ترتیب در نقاط E و F مماس است (دایره ی محاطی خارجی نظیر ضلع BC). ثابت کنید محیط مثلث برابر است با $2AE$.



رابطه ی شعاع های دایره های محاطی داخلی و خارجی مثلث متساوی الاضلاع

در مثلث متساوی الاضلاع ABC مطابق شکل $OB = R$ شعاع دایره ی محیطی، $OH = r$ شعاع دایره ی داخلی و $HE = r_a$ شعاع دایره ی محاطی خارجی نظیر ضلع $BC = a$ است.

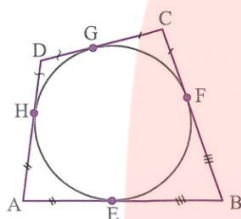
$$\left. \begin{aligned} \Delta OBH(90^\circ - 60^\circ - 30^\circ) &\Rightarrow OH = \frac{OB}{2} \Rightarrow R = 2r \\ \Delta OBE(90^\circ - 60^\circ - 30^\circ) &\Rightarrow OB = \frac{OE}{2} \Rightarrow R = \frac{r+r_a}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow r_a = \frac{rR}{r}$$

$$\Rightarrow r_a = r_b = r_c = 2r = \frac{rR}{r} = h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

و می توان نوشت $r_a = r_b = r_c = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ و $R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ ، $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

مثال: طول خط مرکزین دایره ی محیطی و دایره ی محاطی خارجی مثلث متساوی الاضلاعی به طول ضلع $\sqrt{3}$ را بیابید.

مثال: مساحت مثلث متساوی الاضلاعی که راس های آن مرکز دایره های محاطی خارجی مثلث متساوی الاضلاعی به طول ضلع ۳ است را بیابید.

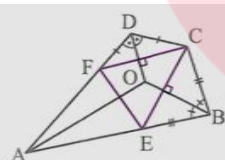


خواص چهارضلعی های محیطی

۱) در هر چهارضلعی محیطی، مجموع اضلاع مقابل آن، دو به دو برابرند.

اثبات:

۲) اگر مجموع اضلاع مقابل یک چهارضلعی برابر باشد، آن چهارضلعی محیطی است (عکس شماره ۱).



اثبات: در چهارضلعی ABCD داریم $AB + CD = AD + BC$ ، مطابق شکل BE را برابر DF و BC را برابر CD جدا می کنیم. در مثلث های متساوی الساقین EBC و CDF نیمسازهای زاویه های B و D عمودمنصف های اضلاع CF و CE هستند، پس نقطه ی تلاقی آنها O، نقطه ی همرسی عمودمنصف های مثلث EFC است از طرفی داریم:

$$\triangle AEF \text{ متساوی الساقین است. } \Rightarrow AE = AF \Rightarrow AE + BE + CD = AF + DF + BC \Rightarrow AB + CD = AD + BC \text{ (فرض)}$$

بنابراین عمودمنصف EF از نقطه ی O می گذرد و نیمساز زاویه ی A است اما می دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از اضلاع آن زاویه به یک فاصله است، پس نقطه ی O از اضلاع چهارضلعی ABCD به یک فاصله است. در نتیجه دایره ای وجود دارد که بر اضلاع چهارضلعی ABCD مماس است لذا این چهارضلعی محیطی است.

مثال:

در چهارضلعی محیطی ABCD، $AB + CD = 8$ است. محیط چهارضلعی را حساب کنید.

مثال:

سه نیمساز داخلی یک چهارضلعی از یک نقطه می گذرند و اندازه سه ضلع متوالی آن به ترتیب ۷۲ و ۱۰۷ و ۹۱ می باشد. اندازه ضلع چهارم را

به دست آورید.

مثال:

- یک دوزنقه متساوی الساقین بر دایره ای به شعاع $R = 3$ محیط است. اگر مساحت دوزنقه ۴۵ باشد، طول ساق آن را به دست آورید.

مثال: در یک دوزنقه ی متساوی الساقین محیطی، اندازه ی قاعده ها ۲ و ۸ است. مساحت دوزنقه را بیابید.

تست:

اگر $AB = a + 1$ و $BC = 4a - 3$ و $CD = 3a + 2$ و $DA = a + 3$ ضلع های متوالی یک چهارضلعی محیطی باشند، مقدار a کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

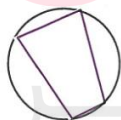
۱ (۱)

چهارضلعی $ABCD$ را بر دایره ای به مرکز O محیط کرده ایم. مجموع زاویه های \widehat{AOB} و \widehat{COD} کدام است؟

 240° (۴) 120° (۳) 180° (۲) 90° (۱)

چندضلعی های محاطی

اگر همه ی رأس های یک چندضلعی روی دایره قرار داشته باشند آن را چندضلعی محاطی می نامند و دایره را محیط بر چندضلعی گویند.



(پ)



(ب)



(آ)

ویژگی مشترک چندضلعی های محاطی

www.my-dars.ir

یک چندضلعی محاطی است اگر و تنها اگر عمود منصف اضلاع آن هم رس باشند.

اثبات:

نتیجه:

مثلث همواره یک چندضلعی محاطی است زیرا عمود منصف‌های اضلاع آن هم‌س‌اند. چندضلعی‌های منتظم هم همواره محاطی‌اند.

ویژگی چهارضلعی‌های محاطی

یک چهارضلعی محاطی است اگر و تنها اگر زاویه‌های روبه‌رو مکمل یکدیگر باشند.

اثبات:

(آ) اگر چهارضلعی محاطی باشد آن‌گاه زوایای مقابل آن مکمل‌اند. زیرا:

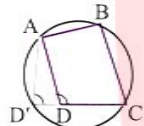
$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{\widehat{BCD}}{2} + \frac{\widehat{BAD}}{2} = \frac{\text{کل دایره}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{D} = 360^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$$

(ب) اگر زوایای مقابل یک چهارضلعی مکمل باشند، چهارضلعی محاطی است.

اثبات: فرض کنیم در چهارضلعی ABCD، $\hat{B} + \hat{D} = \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$. در این صورت از سه نقطه A، B و C یک دایره می‌گذرد (دایره‌ی محیطی مثلث ABC) حال ثابت می‌کنیم این دایره از نقطه‌ی D می‌گذرد. به همین جهت از برهان خلف استفاده می‌کنیم. اگر این دایره از رأس D نگذرد

نقطه‌ی برخورد خط CD با دایره را D' می‌نامیم و از D' به A وصل می‌کنیم. داریم:

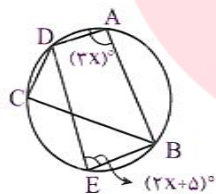


$$\left. \begin{aligned} \text{چهارضلعی محاطی } ABCD' &\Rightarrow \hat{B} + \hat{D}' = 180^\circ \\ \text{(فرض)} \hat{B} + \hat{D} &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{D} = \hat{D}'$$

از طرفی $\hat{D} > \hat{D}'$ است پس $\hat{D} > \hat{D}'$ است. بنابراین دایره از رأس D می‌گذرد.

مثال:

در دایره‌ی مقابل، $\hat{A} = (3x)^\circ$ ، $\hat{E} = (2x + 5)^\circ$. اندازه‌ی زاویه‌ی DCB چند درجه است؟



مای دارس

مثال: طول دو ضلع مجاور یک چهارضلعی محاطی ۴ و ۸ می‌باشد. اگر قطرهای این چهارضلعی بزرگ‌ترین مقدار خود را داشته باشند، آن‌گاه شعاع دایره‌ی محیطی آن کدام است؟

۵ (۴)

۴√۳ (۳)

۶ (۲)

۲√۵ (۱)

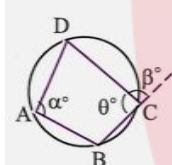
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

مثال:

ثابت کنید هر دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، یک چهارضلعی محاطی است.

تمرین: ثابت کنید شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی هر دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، محاطی است.

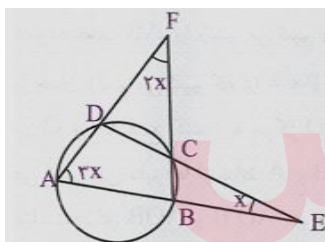


ویژگی‌های بیش‌تر چهارضلعی محاطی

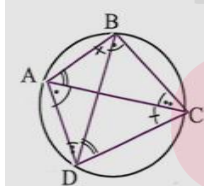
(۱) در هر چهارضلعی محاطی، اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی برابر اندازه‌ی زاویه‌ی خارجی مقابل به آن است.

اثبات:

مثال:



در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟



(۲) در هر چهارضلعی محاطی اندازه‌ی زاویه‌ی بین یک ضلع و یک قطر برابر است با اندازه‌ی زاویه‌ی بین ضلع مقابل و قطر دیگر.

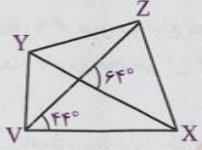
اثبات: *

www.my-dars.ir

مثال در شکل مقابل، چهارضلعی محاطی $XZYV$ چهارضلعی محاطی است. اندازه‌ی زاویه‌ی برخورد امتداد اضلاع YZ و VX چند درجه است؟

۲۲ (۲)
۲۴ (۴)

۲۶ (۱)
۲۰ (۳)



مثال:

مطابق شکل مقابل، از نقاط تقاطع دو دایره، دو قاطع AE و BF رسم شده‌اند. ثابت کنید $AB \parallel EF$



مثال:

در یک دایره دو وتر عمود بر هم و در انتهای این وترها مماس‌هایی بر دایره رسم کنید. از برخورد این چهار مماس یک چهارضلعی به دست می‌آید، ثابت کنید این چهارضلعی هم محیطی و هم محاطی است.

مثال:

ثابت کنید در یک چهارضلعی محاطی، نقطه‌ی تلاقی نیمساز داخلی یک زاویه و نیمساز خارجی زاویه‌ی مقابل، روی دایره‌ی محیطی چهارضلعی قرار دارد.

www.my-dars.ir

تمرین:

۱- مساحت مثلث متساوی الاضلاعی را حساب کنید که درون دایره ای به شعاع R محاط است.

۲- ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه ی مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایره ی محیطی مثلث قطع می کنند.

۳- یک ذوزنقه هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضربدر میانگین هندسی آنها.

۴- اگر r_a ، r_b و r_c شعاع های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی مثلث باشد، نشان دهید:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} \quad (\text{الف})$$

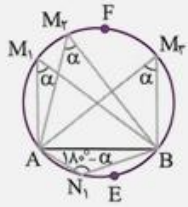
(ب) همچنین نشان دهید $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$

www.my-dars.ir

کمان درخور یک زاویه

دایره‌ی معلوم $C(O, R)$ و وتر ثابت AB را در آن در نظر می‌گیریم، همه‌ی زوایای محاطی که رأس آن‌ها روی کمان \widehat{AFB} قرار دارد و اضلاعشان

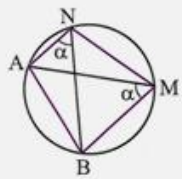
از دو نقطه‌ی ثابت A و B عبور می‌کنند هم‌اندازه‌اند ($\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = \widehat{M}_3 = \dots = \alpha$)



هم‌چنین همه‌ی زوایه‌های محاطی که رأس آن‌ها روی کمان \widehat{AEB} قرار دارد و اضلاعشان از دو نقطه‌ی

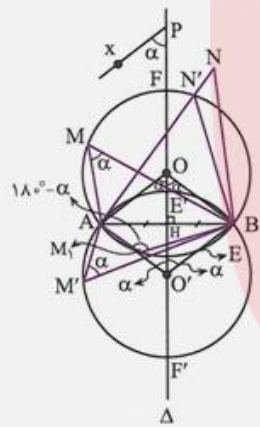
ثابت A و B عبور می‌کنند هم‌اندازه‌اند ($\widehat{N}_1 = \widehat{N}_2 = \widehat{N}_3 = \dots = 180^\circ - \alpha$)

بنابراین قرارداد کمان \widehat{AFB} را کمان درخور زاویه‌ی α رویه‌رو به پاره‌خط AB و کمان \widehat{AEB} را کمان درخور زاویه‌ی $180^\circ - \alpha$ رویه‌رو به پاره‌خط AB می‌نامند.



قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که کمان درخور زاویه‌ی α رویه‌رو به پاره‌خط AB بخشی از یک دایره‌ی منحصر به فرد است. مثلاً اگر مطابق شکل مقابل، نقاط M و N یک طرف پاره‌خط AB باشند و $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = \alpha$ ، قطعاً نتیجه می‌شود چهار نقطه‌ی A, B, M, N روی یک دایره‌اند و چهارضلعی $ABMN$ محاطی است.

قضیه: مکان هندسی رأس زاویه‌ای برابر α که ضلع‌هایش از دو نقطه‌ی ثابت می‌گذرند، کمان‌هایی از دو دایره‌ی مساوی است که از آن دو نقطه‌ی ثابت می‌گذرند و زاویه‌ی مرکزی رویه‌رو به وتر مشترک آن‌ها برابر 2α است.



اثبات: ابتدا طریقه‌ی رسم دو دایره را می‌یابیم، دو نقطه‌ی ثابت A و B را در نظر می‌گیریم عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم و آن را Δ می‌نامیم. از نقطه‌ی دلخواه P واقع بر خط Δ نیم‌خط Px را چنان رسم می‌کنیم که $\widehat{HPx} = \alpha$ باشد. از نقاط A و B خط‌هایی موازی Px رسم می‌کنیم تا Δ را در O' قطع کنند. به مرکز O و شعاع OA و هم‌چنین به مرکز O' و شعاع $O'A$ دو دایره رسم می‌کنیم، این دایره‌ها از نقاط A و B می‌گذرند. با توجه به خطوط موازی و مورب و متساوی‌الساقین بودن مثلث‌های AOB و $AO'B$ نتیجه می‌شود که زوایای مرکزی AOB و $AO'B$ برابر 2α و در نتیجه $\widehat{AEB} = \widehat{AE'B} = 2\alpha$ است.

چون مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی AOH ، BOH ، $AO'H$ و $BO'H$ به حالت یک ضلع و زاویه‌ی حاده‌ی مقابل آن همنهشت‌اند، نتیجه می‌شود چهارضلعی $AOBO'$ لوزی است و شعاع دایره‌ها برابرند.

(آ) هر نقطه روی کمان‌های $\widehat{AF'B}$ و \widehat{AFB} رأس زاویه‌ای به‌اندازه‌ی α است که اضلاعشان از دو نقطه‌ی ثابت A و B می‌گذرند، زیرا:

$$\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AEB}}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

(ب) حال ادعا می‌کنیم اگر نقطه‌ی N رأس هر زاویه در طرف کمان \widehat{AFB} باشد به‌طوری که اضلاعش از دو نقطه‌ی ثابت A و B می‌گذرد و اندازه‌اش برابر α باشد، آن‌گاه N روی کمان \widehat{AFB} قرار دارد. برهان خلف: اگر این‌طور نباشد، N داخل یا خارج دایره قرار دارد. مثلاً N خارج دایره باشد، در این‌صورت زاویه‌ی $\widehat{AN'B}$ برابر α است و بنابه زاویه‌ی خارجی در مثلث BNN' نتیجه می‌شود $\widehat{AN'B} > \widehat{ANB}$ و $\alpha > \alpha$ که تناقض است اگر N داخل دایره باشد، با استدلال مشابه به همین تناقض می‌رسیم. در نتیجه نقطه‌ی N روی کمان \widehat{AFB} است و مکان مطلوب کمان درخور زاویه‌ی α رویه‌رو به پاره‌خط AB است.

تذکر: عموماً مسأله‌ای از مثلث که در آن یک ضلع و زاویه‌ی رویه‌رو به آن معلوم باشد مربوط به کمان درخور است.

گروه آموزشی عصر

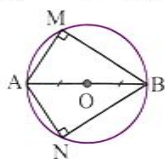
www.my-dars.ir

نتایج:

(۱) کمانهای \widehat{AEB} و $\widehat{AE'B}$ از دو دایره O و O' ، کمان درخور زاویه $180^\circ - \alpha$ روبه‌رو به پاره‌خط AB می‌باشند. زیرا در چهارضلعی محاطی

$$\widehat{AMB}_1 = 180^\circ - \widehat{AMB} = 180^\circ - \alpha$$

(۲) کمان درخور زاویه 90° روبه‌رو به پاره‌خط AB ، دایره‌ای به قطر AB است.



نکته: دو نقطه A و B به کمان درخور زاویه α یا $180^\circ - \alpha$ نسبت به پاره‌خط AB تعلق ندارند و کمان درخورها نسبت به پاره‌خط AB قرینه‌اند.

(۳) محاسبه شعاع دایره‌ای که کمان درخور، بخشی از آن است:

با فرض $AB = a$ در مثلث قائم‌الزاویه AOH داریم:

$$\sin \alpha = \frac{AH}{OA} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{R} \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

(۴) محاسبه فاصله مرکز دایره از پاره‌خط AB :

$$\Delta AOH: \cos \alpha = \frac{OH}{OA} \Rightarrow OH = R \cos \alpha \rightarrow OH = R |\cos \alpha|$$

به جهت این که ممکن است α منفرجه باشد.

با قرار دادن $R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$ در تساوی اخیر داریم:

$$OH = \frac{a}{2 \sin \alpha} |\cos \alpha| = \frac{a}{2 |\tan \alpha|}$$

مثال: کمان درخور (یا کمان حاوی یا کمان شامل) زاویه 30° درجه رو به رو به پاره خط $AB = 4$ بخشی از دایره $C(O, R)$ است.

الف) شعاع دایره را محاسبه کنید.

ب) فاصله ی پاره خط AB از مرکز دایره را محاسبه کنید.

مثال: دو نقطه ی ثابت B و C و نقطه ی متحرک A ، سه راس یک مثلث اند. اگر $BC = 6$ و $\hat{A} = 60^\circ$ و نیمساز زاویه ی A همواره از نقطه ی ثابتی مانند D بگذرد، فاصله ی D از نقطه ی B را بیابید.

مثال: در مثلث ABC ، ضلع $BC = 6$ و زاویه ی $\hat{A} = 30^\circ$ است. فاصله ی مرکز دایره ی محیطی این مثلث از ضلع BC را حساب کنید.

آزمون جامع فصل اول:

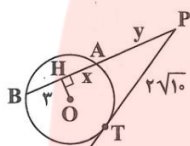
۱- اضلاع مثلثی با اندازه‌های ۸، ۱۱ و ۱۵ متناسب‌اند. دایره‌ی محاطی داخلی، ضلع بزرگ‌تر را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{4}{7}$

۲- سه زاویه از یک چهارضلعی داده شده است. در کدام حالت چهارضلعی مورد نظر می‌تواند محاطی باشد؟

- (۱) $90^\circ, 81^\circ$ و 102° (۲) $56^\circ, 104^\circ$ و 124°
 (۳) $45^\circ, 115^\circ$ و 125° (۴) $83^\circ, 78^\circ$ و 100°

۳- در شکل روبه‌رو، اندازه‌ی $x + y$ چه قدر است؟ (O مرکز دایره است.)

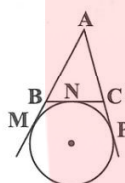


- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۴- دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۹ مماس برون هستند. به‌ازای کدام مقدار m، اندازه‌ی مماس مشترک خارجی آن‌ها $m + 2$ است؟

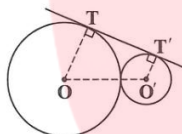
- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۵- در شکل مقابل، دایره‌ای به مرکز O در نقطه‌ی N بر ضلع BC و در نقاط M و P بر امتداد اضلاع AB و AC مماس است. اگر $AM = 6$ باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟



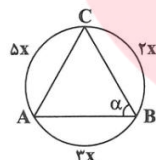
- (۱) ۱۵ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) ۲۱

۶- در شکل مقابل اگر شعاع دایره‌ها به ترتیب ۲ و ۸ باشد، مساحت چهارضلعی OO'TT' کدام است؟



- (۱) ۳۶ (۲) ۳۸ (۳) ۴۰ (۴) ۴۲

۷- در شکل مقابل زاویه‌ی α چند درجه است؟



- (۱) 90° (۲) 60° (۳) 80° (۴) 75°

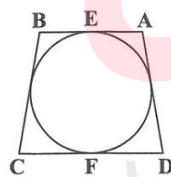
۸- دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۲ بر هم مماس خارج‌اند. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو مماس مشترک خارجی آنها تا نقطه‌ی تماس دو دایره کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{7}{2}$

۹- دوزنقه‌ی متساوی‌الساقینی بر دایره به شعاع ۳ محیط است. اگر زاویه‌ی حاده‌ی دوزنقه 30° باشد، مساحت دوزنقه چه قدر است؟

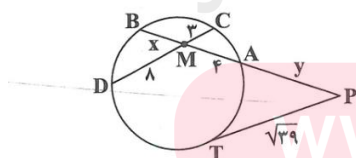
- (۱) ۱۲ (۲) ۲۴ (۳) ۳۶ (۴) ۷۲

۱۰- مطابق شکل، دوزنقه‌ی ABCD بر دایره محیط است. اگر $AE = 4$ و $DF = 9$ باشد، شعاع دایره کدام است؟

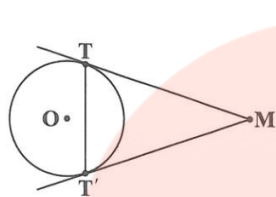


- (۱) ۳ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) ۶ (۴) $6\sqrt{2}$

۱۱- در شکل روبه‌رو مقدار $|x - y|$ چه قدر است؟



- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۱



۱۲- در شکل زیر دایره‌ی $C(O, 2\sqrt{15})$ مفروض است، به‌گونه‌ای که $OM = 16$ و دو خط MT

و MT' بر دایره مماس‌اند. اندازه‌ی وتر TT' چه قدر است؟

$$\frac{8\sqrt{15}}{3} \quad (2)$$

$$\frac{7\sqrt{15}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{4\sqrt{15}}{3} \quad (4)$$

$$\frac{7\sqrt{15}}{4} \quad (3)$$

۱۳- طول اضلاع متوالی یک چهارضلعی محیطی x و $2x+1$ و $3x$ و $x+4$ است. محیط این چهارضلعی چند واحد است؟

$$50 \quad (4)$$

$$40 \quad (3)$$

$$30 \quad (2)$$

$$20 \quad (1)$$

۱۴- نقطه‌ی M خارج دایره مفروض است. اگر فاصله‌ی دورترین و نزدیک‌ترین نقطه‌های دایره از M به ترتیب $9\sqrt{3}$ و $\sqrt{27}$ باشند، طول

مماسی که از M نسبت به دایره رسم می‌شود، کدام است؟

$$6\sqrt{3} \quad (4)$$

$$9\sqrt{3} \quad (3)$$

$$9 \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir