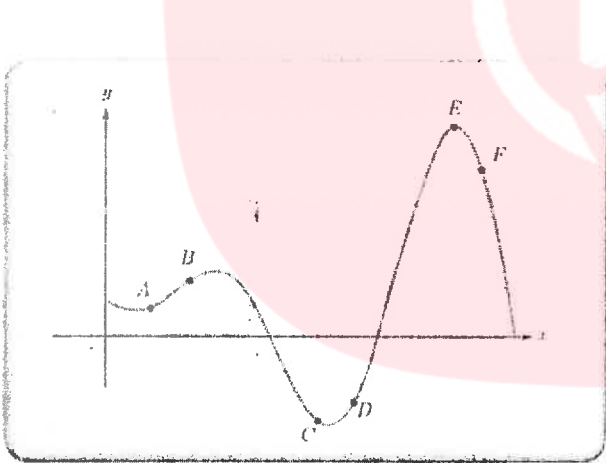


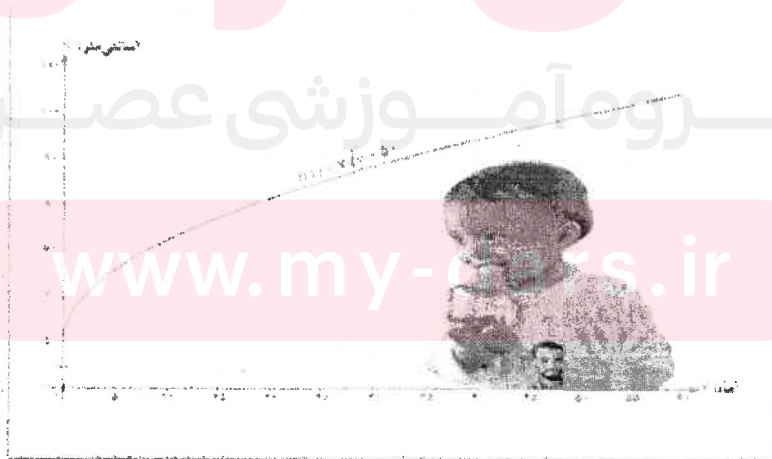
# مستوفی

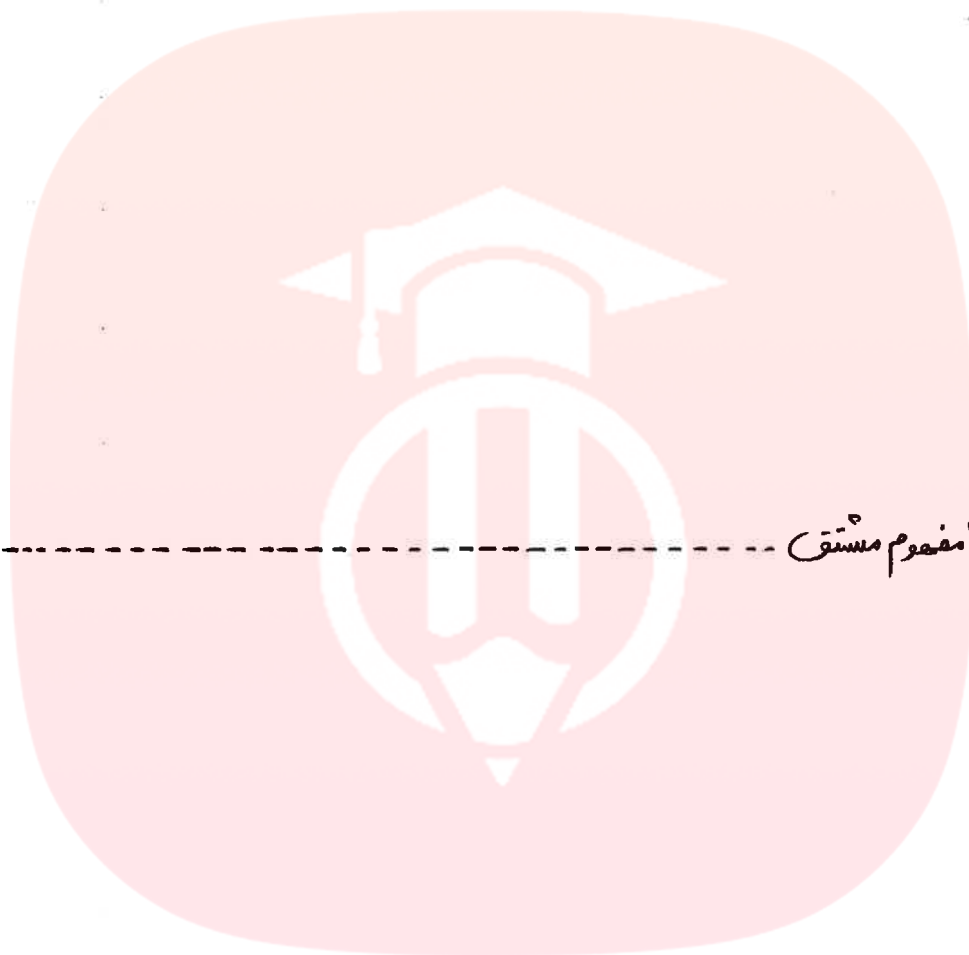


# مای درسی

گروه آموزشی عصر

[www.my-tips.ir](http://www.my-tips.ir)





۱۹۳

آشنایی با مفهوم مشتق

# مای درس

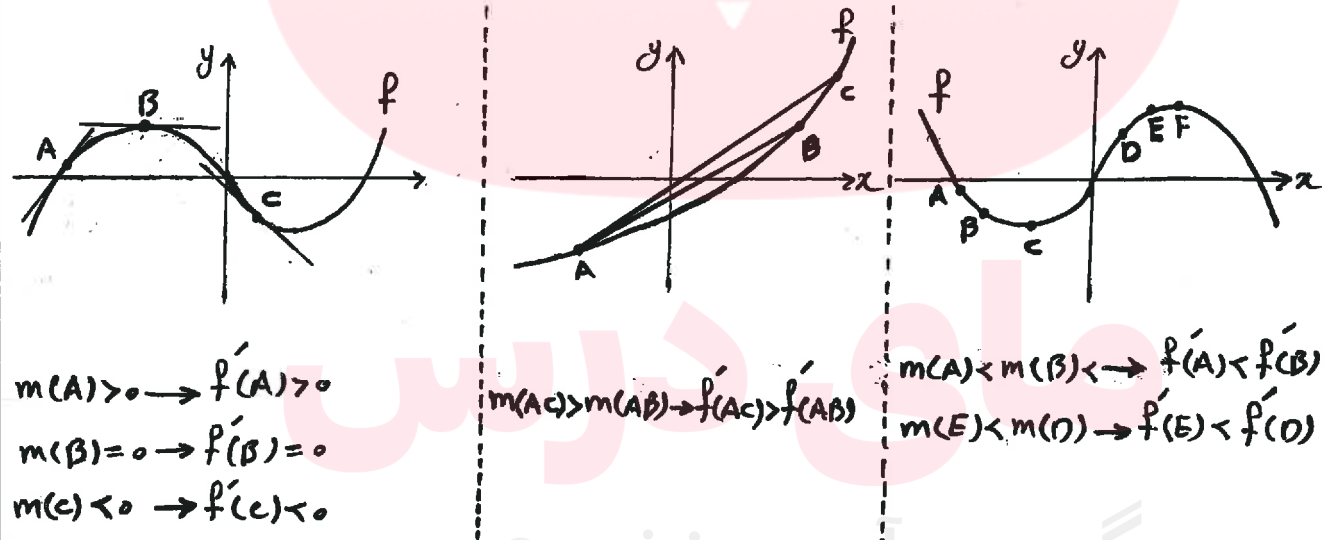
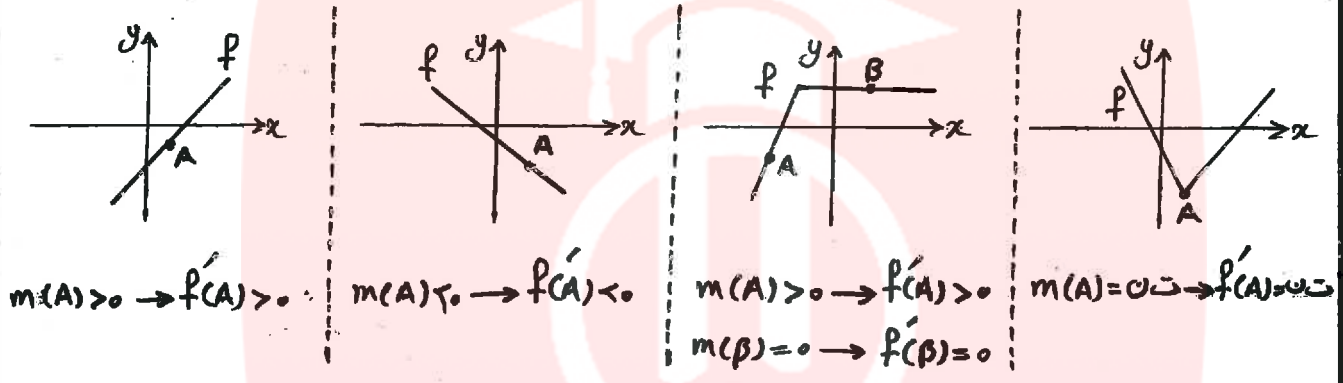
گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

آشنایی با مفهوم مشتق:

صفحه ۴۴ تا ۷۴ کتاب درسی

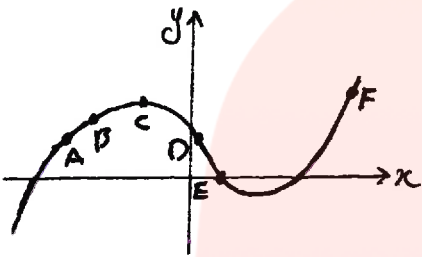
مشتق نقطه  $A$  = شیب خط مماس بر نمودار در نقطه  $A = f'(A)$



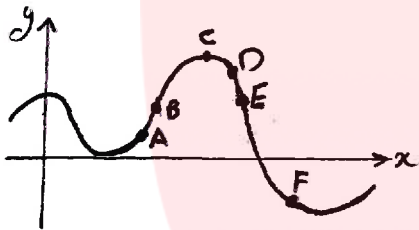
نکته: در توابع خطی شیب تمام نقاط باهم برابر است ← پس مشتق تمام نقاط نیز باهم برابر است.  
و این در توابع غیر خطی (منحنی ها) این گونه نیست.

تمرین ①: در شکل مقابل که مربوط به تابع  $f$  است شیب نقاط مشخص شده را از کوچک ترین به بزرگ ترین

رتب کنید.

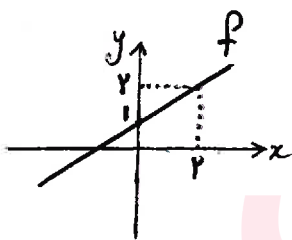


تمرین ②: در نمودار زیر، نقاط را در سته را با شیب های ارائه شده نقلیه کنید.



|    |    |                |     |      |                |      |
|----|----|----------------|-----|------|----------------|------|
| -3 | -2 | $-\frac{1}{3}$ | صفر | +1,5 | $+\frac{5}{2}$ | شیب  |
|    |    |                |     |      |                | نقطه |

تمرین ③: یا توجه به نمودار  $f$ ، سوالات زیر پاسخ دهید.



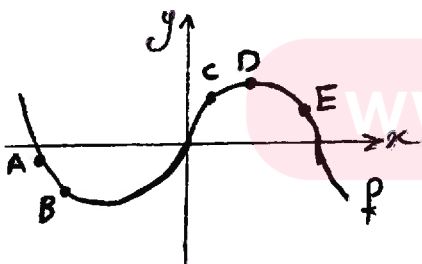
الف: مقدار  $f'(x)$  را محاسبه کنید.

ب: آیا منتهای این نقطه درسی این نمودار یافت که شیب معاف مناسب به نمودار

در آن نقطه برابر -1 باشد؟ چرا؟

تمرین ④: با توجه به نمودار زیر درستی و نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

تذکره:  $f(x)$  یا  $f'(x)$  منفی دارد!!!



\*  $f'(A) > f'(B)$

\*  $f'(C) > f'(D)$

\*  $f(D) > 0$

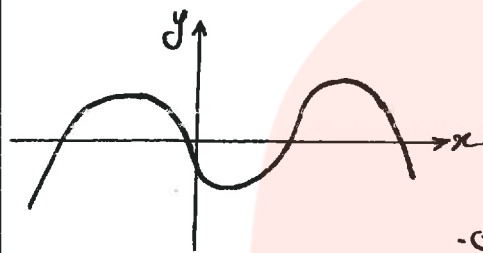
\*  $f'(E) > f(E)$

\*  $\frac{f'(D)}{f(E)} > 0$

\*  $f(A) + f(E) < 0$

تمرین ۵: با توجه به نمودار زیر نقاط خواسته شده را در این مشتق کنید.

\* نقطه A: مقدار تابع و مقدار مشتق هر دو منفی است.



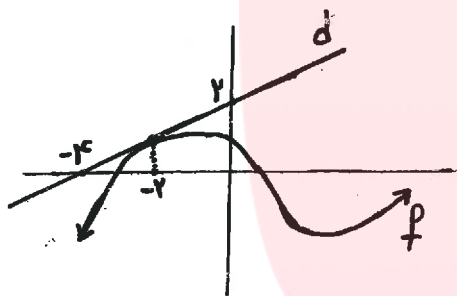
\* نقطه B: مقدار تابع منفی و مقدار مشتق برابر صفر است.

\* C و D: دو نقطه ای که این نمودار همیشه در آنجا قرار می‌گیرد هم است.

تمرین ۶: در شکل زیر خط d در نقطه  $x = -2$  به نمودار f مماس شده است.

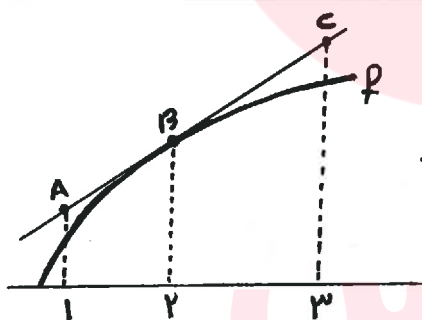
الف: مشتق تابع f را در نقطه  $x = -2$  محاسبه کنید.

ب: نقطه A با طول ۳+ در این منحنی مماس قرار می‌گیرد. عرض آن چیست؟



تمرین ۷: معادله خط مماس به نقطه d در نقطه B به نمودار f مماس شده است.

اگر  $f'(c) = 5$  و  $f(c) = 4$  باشد، مختصات نقاط A, B, C را مشخص کنید.



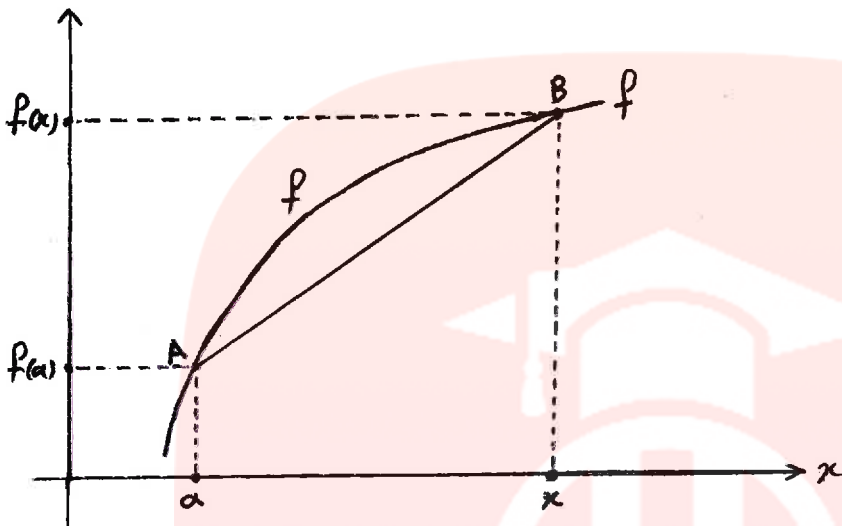
تمرین ۸: تعدادی از مقادیر تابع f در بازه [۵، ۱] در جدول زیر آمده است. نمودار f در این بازه کدام است؟

|      |   |    |    |    |    |
|------|---|----|----|----|----|
| x    | ۱ | ۲  | ۳  | ۴  | ۵  |
| f(x) | ۸ | ۱۰ | ۱۹ | ۲۸ | ۴۷ |

www.my-dars.ir

c1  
 c2  
 c3  
 c4

تعریف مشتق ①:



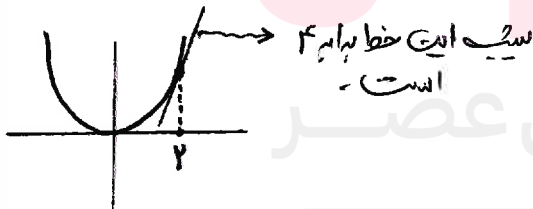
AB یاره خط  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

مثال ۱، اگر  $f(x) = x^2$  باشد حاصل  $f'(2)$  را بیابید.

$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{0}{0}$  معمم

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 2+2 = 4$

پس  $f'(2) = 4$  باشد ← یعنی اینک  $\frac{0}{0}$  سبب خطاهاست برقرار  $x=2$  در نقطه  $x=2$  باید است.



مثال ۲: سبب خطاهاست برقرار  $f(x) = x^2 + 4x + 1$  در نقطه  $x = -1$  حاصل کنید.

$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 1 - (-2)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+3)}{x+1} = -1 + 3 = 2$

تذکره: در حل مسائل تعریف مشتق همیشه پس از جایگزینی عدد در  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  به معجم منقسم و برای رفع ابهام از اتحاد مزدوج، تجزیم، اتحاد ملحق در جمله‌ای، فاکتورگیری، \* مزدوج و تقسیم استفاده می‌کنیم.

تربیت ①: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق توابع زیر را در نقاط منفرجه سره محاسبه کنید.

$$۱) f(x) = 2x - 4$$

$$f'(1) =$$

$$۲) f(x) = -5x - 1$$

$$f'(3) =$$

$$۳) f(x) = x^2$$

$$f'(-2) =$$

$$۴) f(x) = x^2 - 5$$

$$f'(-1) =$$

$$۵) f(x) = x^2 + 3x - 2$$

$$f'(3) =$$

مای دارس  
گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

$$4) f(x) = x^2 - 2x - 1$$

$$f'(-2) =$$

$$7) f(x) = -x^2 + x + 5$$

$$f'(-1) =$$

$$8) f(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

$$f'(2) =$$

$$9) f(x) = -2x^2 + x + 10$$

$$f'(-2) =$$

$$10) f(x) = x^3 - 2$$

$$f'(-1) =$$

$$11) f(x) = \sqrt{x} - 2$$

$$f'(4) =$$

مای درس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)



تمرین ۲: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع  $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$  را در نقطه  $x = -3$  محاسبه کنید.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

یاری آدرس: معادله خط

برای پیدا کردن معادله خط، شیب و یک نقطه نیاز داریم. مثلاً  $m = 2$  و  $(-1, 4)$

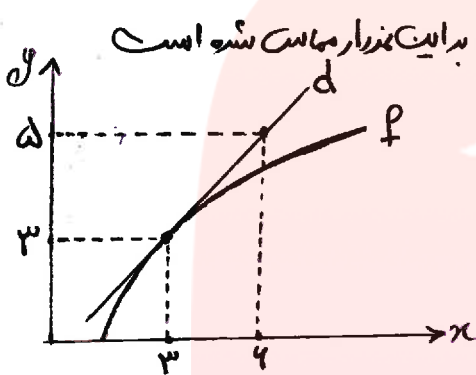
تمرین ۳: معادله خط مماس به منحنی  $f(x) = 2 - 3x^2$  را در نقطه  $x = 1$  پیدا کنید.

تمرین ۴: معادله خط مماس به منحنی  $f(x) = \sqrt{x-1}$  را در نقطه  $x = 5$  محاسبه کنید.

تمرین ۵: معادله خط مماس به منحنی  $y = \frac{1}{x}$  را در نقطه  $(1, 1)$  پیدا کنید.

تمرین ۶: عرض از مبدا و معادله خط مماس به منحنی  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  را در نقطه  $x = -1$  پیدا کنید.

تمرین ۷: اگر  $12 = 3f'(2)$  باشد حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$  کدام است؟



تمرین ۸: نمودار زیر مربوط به تابع  $f$  می باشد و خط  $d$  در نقطه  $x = 3$  بر این نمودار مماس شده است

الف: حاصل  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$  کدام است؟

ب: حاصل  $3f'(3) - f'(3)$  کدام است؟

تذکره: گاهی ۲ عبارت  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  و عدد یا عبارتی را اضافه می کنند که این عدد یا عبارت اضافی را باید جدا کنیم

مثال: اگر  $f'(2) = 5$  باشد حاصل هر یک از عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$* \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \rightsquigarrow = f'(2) = 5$$

$$* \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{3x - 6} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{3(x - 2)} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{1}{3} f'(2) = \frac{5}{3}$$

$$* \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{1}{4} f'(2) = \frac{5}{4}$$

$$* \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{f(x) - f(2)} \rightsquigarrow = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{5}$$

$$* \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 4}{f(x) - f(2)} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{f(x) - f(2)} = 5 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{f(x) - f(2)} = 5 \times \frac{1}{f'(2)} = 1$$

تمرین ۹: اگر  $f'(1) = 3$  باشد حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 2f(1)}{x^2 - 1}$  را محاسبه کنید.

تمرین ۱۰: اگر  $f(3) = -1$  و  $g(3) = 13$  باشد حاصل  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)g(x) - g(x)}{x - 1}$  چند برابر  $f'(3)$  است؟

تمرین ۱۱: اگر  $f(-2) = 2$  مقدار  $\lim_{t \rightarrow -2} \frac{f(t) - f(-2)}{2(t+2)}$  کدام است؟  
 (مربوط به تمرین ۷۴)

$1(1)$        $-1(2)$        $2(3)$        $1(4)$

تمرین ۱۲: اگر مشتق تابع  $f$  در نقطه  $x=2$  موجود باشد آنگاه حاصل عبارت  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(-2)}{x^2 - 4}$  کدام است؟ (کانون)

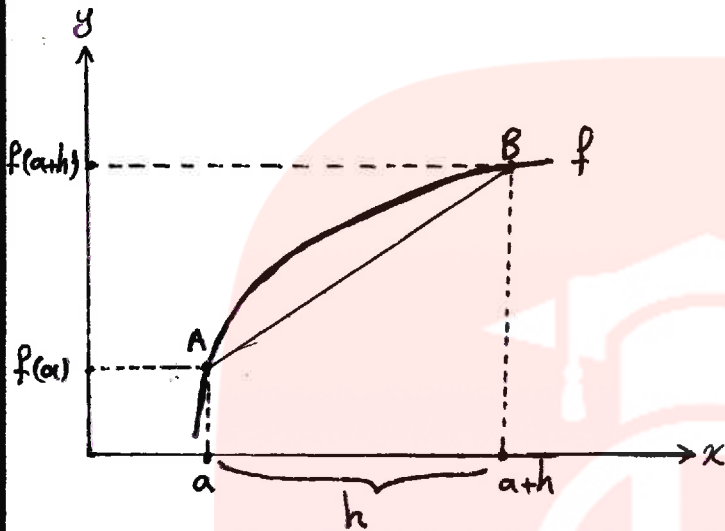
$1) \frac{1}{4} f'(2)$        $2) -\frac{1}{4} f'(2)$        $3) -\frac{1}{4} f'(2)$        $4) \frac{1}{4} f'(2)$

تمرین ۱۳: اگر خط مماس بر نمودار تابع  $f$  در نقطه  $x = -1$  به خط  $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$  عمود باشد حاصل

عبارت  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x^2 + 3x - 4}$  کدام است؟

$1) -\frac{3}{5}$        $2) \frac{3}{5}$        $3) -3$        $4) 5$

تعریف مشتق (۷):



AB شیب =  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \rightarrow f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

تذکره: h می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \rightarrow f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$

تذکره: برای بدست آوردن مشتق با استفاده از تعریف، فقط از رابطه (۱) استفاده می‌کنیم چون ساده‌تر است.

نکته ۱: خاصه اوقات h را از این فریب است که در این صورت از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+mh) - f(a+nh)}{kh} = \frac{(\text{ضریب } h \text{ اول}) - (\text{ضریب } h \text{ دوم})}{\text{ضریب } h \text{ مخرج}} \times f'(a) = \frac{m-n}{k} f'(a)$

نکته ۲: خاصه اوقات h را از این بدان است که چون  $h \rightarrow 0$  توان h را نادیده می‌گیریم.

تمرین ①: اگر  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 3x + 2} = 3$  باشد حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$  را محاسب کنید.

تمرین ②: اگر  $f'(-1) = 2$  باشد حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+3h) - f(-1+h)}{h}$  را محاسب کنید؟

$-f'(1) \quad f'(3) \quad -2(2) \quad 2(1)$

تمرین ③: اگر  $f'(2) = 3$  باشد حاصل عبارت  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{2h}$  را محاسب کنید؟

$\frac{2}{3}(4) \quad \frac{3}{2}(3) \quad \frac{2}{9}(2) \quad \frac{9}{2}(1)$

تمرین ④: اگر شیب خط مماس بر نمودار  $f$  در نقطه  $\alpha = -2$  برابر  $\frac{2}{3}$  باشد، حاصل  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+3h) - f(-2)}{-h}$  را محاسب کنید؟

کدام است؟

$2(4) \quad -2(2) \quad 3(2) \quad -3(1)$

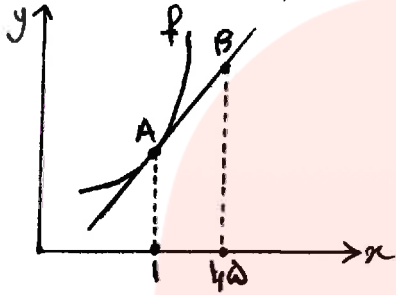
تمرین ⑤: اگر خط مماس بر نمودار  $f$  در نقطه  $\alpha$  با معادله  $y = -2x + 5$  موازی باشد حاصل عبارت  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h+3) - f(3)}{2h^2}$  را محاسب کنید؟

$-0/1(4) \quad 0/1(3) \quad -0/4(2) \quad -1/4(1)$

تمرین ⑥: اگر  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 5$  باشد حاصل  $f'(x) + f'(x)$  را محاسب کنید؟

$1(4) \quad 5(3) \quad 3(2) \quad 2(1)$

تست ۷: اگر  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2$  باشد عرض نقطه B در شکل زیر کدام است؟ (خند سبزه)



۳، ۵ (۱)

۴، ۵ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

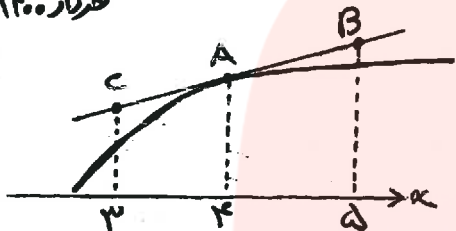
مای دررس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

سوالات امتحان نهایی

۱) برای تابع  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$  در  $x=2$  ،  $f'(2) = 1.5$  ،  $f(2) = 24$  با توجه به شکل منتهاتن نقاط  $A, B, C$  را بیابید. (۹۷ رتبه) شماره ۱۴۰۰



۹۷ رتبه

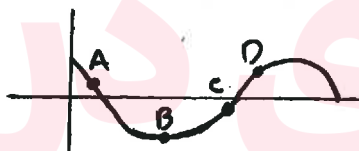
۲) اگر  $f(x) = 1 - 2x^2$  باشد،  $f'(-1)$  را با استفاده از تعریف مشتق بدست آورید.

۳) مشتق تابع  $f(x) = x^3 - 2$  را با استفاده از تعریف مشتق در نقاطی که طول  $x = -1$  بیابید. (۹۸ رتبه)

شماره ۹۸

۴) نقاطی که در آن مشتق منفی را با شیب‌های  $1, 0, \frac{1}{4}, -2$  در جدول نظیر کنید.

|      |   |   |               |    |
|------|---|---|---------------|----|
| شیب  | 1 | 0 | $\frac{1}{4}$ | -2 |
| نقطه |   |   |               |    |



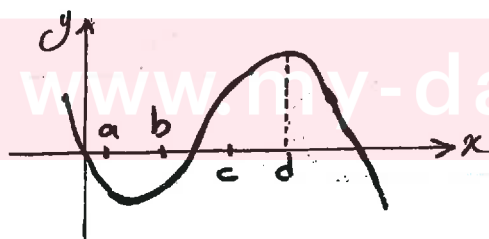
۹۸ رتبه

شماره ۱۴۰۰

۵) با در نظر گرفتن نمودار  $f$  در شکل، نقاط  $a, b, c, d$  طول‌های  $a, b, c, d$  را با مشتق‌های آن در آنجا بیابید.

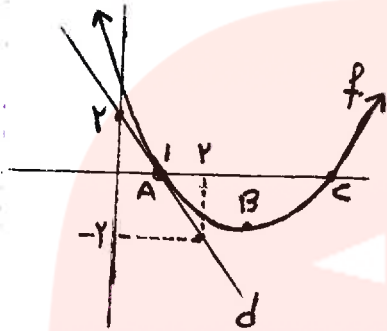
در جدول نظیر کنید.

|     |         |
|-----|---------|
| $x$ | $f'(x)$ |
|     | 0       |
|     | $1/5$   |
|     | 2       |
|     | $-1/5$  |



خرداد ۹۹

۶) در شکل زیر خط  $d$  در نقطه  $a$  به نمودار  $f$  مماس شده است:

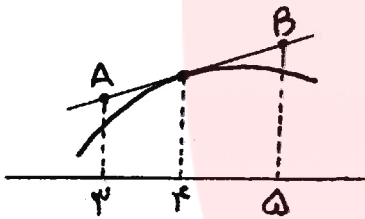


الف: مشتق تابع  $f$  را در نقطه  $a$  محاسبه کنید.

ب: شیب نمودار را در نقاط  $B$  و  $C$  مقایسه کنید.

شهریور ۹۹

۷) برای تابع  $f$  در شکل زیر دو باریم:  $f'(4) = \frac{3}{4}$ ,  $f(4) = 25$  با توجه به شکل مشتقات

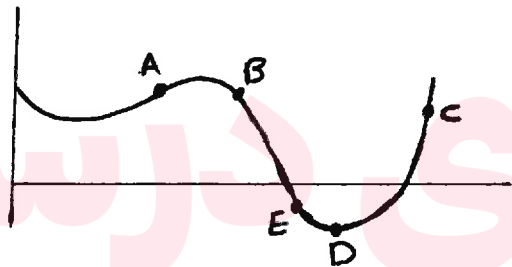


نقاط  $A$  و  $B$  را بیابید.

دی ۹۹

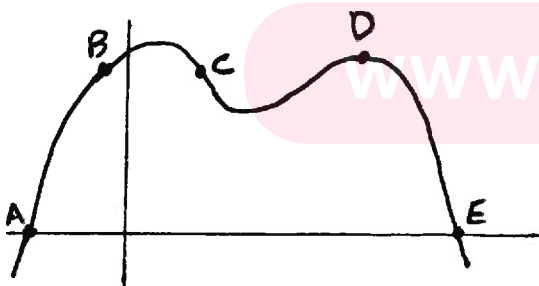
۸) نقاط  $A$  و  $B$  روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نقلیه کنید.  
(این نقطه افزانی است)

| شیب | نقطه |
|-----|------|
| -۳  |      |
| -۱  |      |
| ۰   |      |
| ۱   |      |



شهریور ۱۴۰۱

۹) از بیت نقاط مشخص شده  $A, B, C$  و  $D$  و  $E$  روی نمودار مقابل، در کدام نقطه:



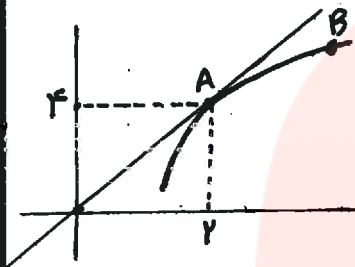
الف: مقدار تابع صفر و مقدار مشتق آن مثبت است؟

ب: مقدار تابع مثبت و مقدار مشتق آن منفی است؟



مس ۱۴۰۱

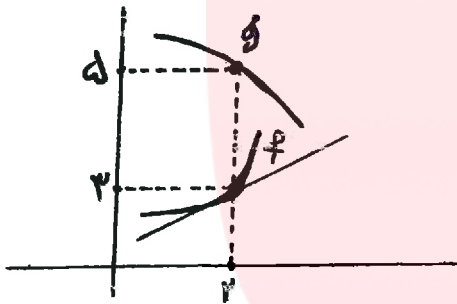
۱۵) فردار تابع  $f$  به صورت زیر رسم شده است. اگر خط  $d$  در نقطه  $A$  بر نمودار  $f$  مماس باشد:



الف: حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$  را بیابید.

ب: نسبت خط مماس در نقاط  $A$  و  $B$  را مقایسه کنید.

۱۱) با توجه به نمودارهای تابع  $f$  و  $g$  حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 3g(x)}{x - 2}$  چند برابر  $f'(2)$  است؟ خبر ۱۴۰۲



# مای درس

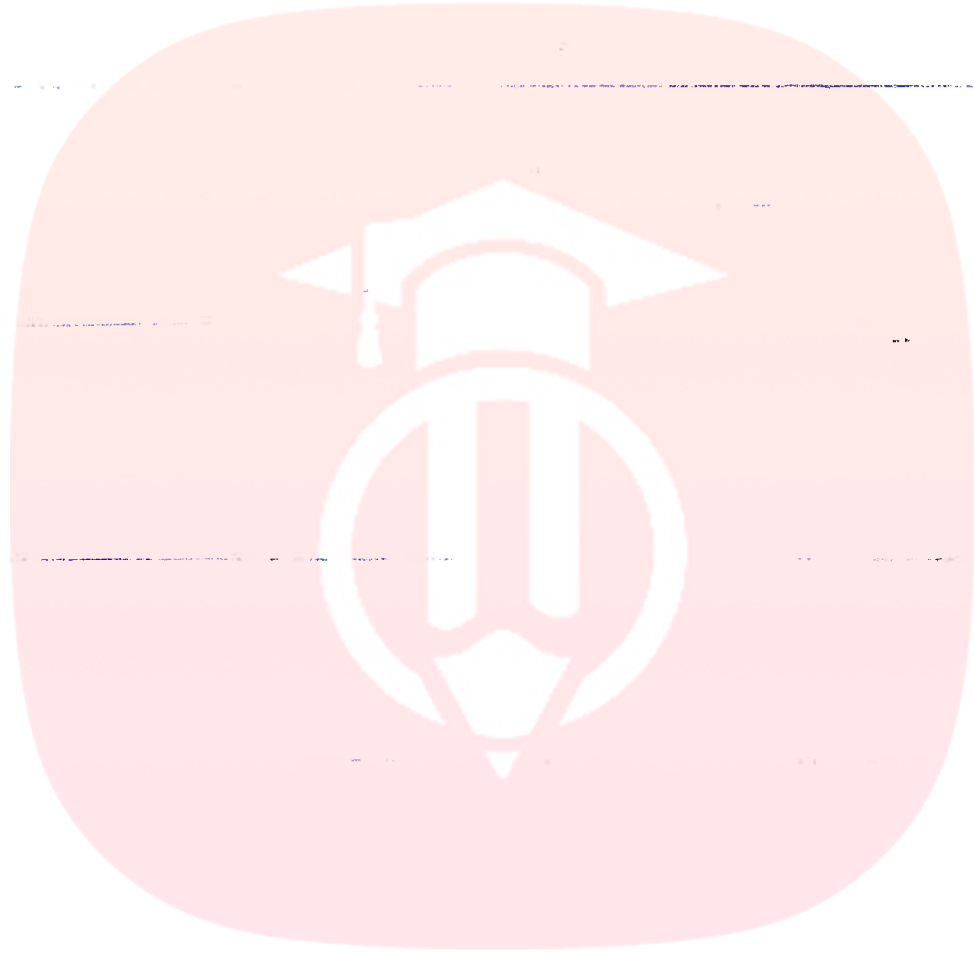
گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

دوازدهم تجربی

فصل چهارم: مشتق

مدرس: مهدی سپهوند



مای درس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)