

آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

تاریخ آزمون: ۱۰/۱۰/۱۰

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

مدرسه:

صفحه ۱ از ۲

پایه: یازدهم (رشته ریاضی)

نام درس: حسابان

بارم	سؤال	ردیف
۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. (الف) مجموع ریشه‌های معادله $ x-2 =3$ برابر است. (ب) شیب خط عمود بر خط $y-2x=3$ برابر است. (ج) معادله درجه دومی که ریشه‌هایش $5+\sqrt{2}$ و $5-\sqrt{2}$ باشد به صورت می‌باشد. (د) اگر $f = \{(2, 5), (7, 3), (-1, \sqrt{3})\}$ ، f^{-1} به صورت می‌باشد.	۱
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. (الف) برای تابع $f: [0, \frac{1}{9}] \rightarrow [0, \frac{1}{3}]$ نمایش $\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{cases}$ نیز قابل قبول است. <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست (ب) تابع $y = [x - \frac{1}{4}]$ و تابع $y = [x] - \frac{1}{4}$ با هم برابر هستند. <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست (ج) تابع $f(x) = x-2 - 1$ در بازه $(-\infty, 2]$ وارون پذیر است. <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست (د) معادله $\sqrt{x^2-4} + 2\sqrt{x+2} = 0$ فاقد ریشه حقیقی می‌باشد. <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست	۲
۱/۵	حداقل چند جمله از دنباله حسابی $\dots, 6, 4, 2$ را جمع کنیم تا حاصل از ۱۱۰ بیشتر شود؟	۳
۱/۲۵	در شکل زیر نمودار سهمی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ رسم شده است. ضرایب a ، b و c را تعیین کنید. 	۴
۱/۵	اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x - 2 = 0$ باشند، معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $\alpha+1$ و $\beta+1$ باشد.	۵
۱/۲۵	معادله $ x-3 + x-1 = 1$ را به روش هندسی حل کنید و تعداد جواب‌ها را مشخص کنید.	۶
۱/۷۵	معادلات زیر را حل کنید. (الف) $\frac{1}{x^2-2x+1} + \frac{2}{x-1} = 3$ (ب) $x^2 - 9 = \sqrt{1-x^2}$	۷

آزمون تشریحی هماهنگ دی ماه

(دوره دوم متوسطه)

نام و نام خانوادگی:

تاریخ آزمون: ۱۰/۱۰/۱۰

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

کلاس:

مدرسه:

صفحه ۲ از ۲

پایه: یازدهم (رشته ریاضی)

نام درس: حسابان

بارم	سؤال	ردیف
۱/۷۵	نقاط $A(-1, 1)$ ، $B(0, 0)$ و $C(1, 2)$ سه رأس یک مثلث هستند. الف) معادله میانه وارد بر ضلع BC را به دست آورید. ب) اندازه ارتفاع وارد بر ضلع AC را بیابید.	۸
۱/۷۵	نمودار تابع با ضابطه $y = 2[x] + 1$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کنید.	۹
۱	نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را یک واحد به سمت راست و ۲ واحد به بالا ببرید. الف) ضابطه تابع جدید را بنویسید. ب) نمودار تابع جدید را با انتقال رسم کنید. (مراحل رسم معلوم باشد.)	۱۰
۱/۲۵	تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x-2} - 1$ مفروض است. الف) ثابت کنید f یک به یک است. ب) تابع وارون f را به دست آورید. ج) نمودار f و f^{-1} را در یک صفحه مختصات رسم کنید.	۱۱
۱/۲۵	اگر $f = \{(2, 1), (1, -3), (-1, 2), (-3, 2), (4, -3)\}$ و $g(x) = \sqrt{2x - x^2}$ باشد، آنگاه توابع $f \times g$ و $f - g$ را محاسبه کنید.	۱۲
۱/۷۵	دو تابع $f(x) = \frac{1}{x-4}$ و $g(x) = \sqrt{5-x}$ مفروض است: الف) دامنه و ضابطه تابع $f \circ g$ را بیابید. ب) حاصل عبارت $(g \circ f)(5)$ چیست؟	۱۳
۰/۷۵	الف) نامعادله $(\sqrt{2})^{x-2} < \frac{1}{4^x}$ را حل کنید.	۱۴
۰/۷۵	ب) نمودار $y = 2^{x+2} - 1$ را به کمک نمودار $y = 2^x$ رسم کنید.	
۰/۵	ج) a را چنان تعیین کنید که تابع نمایی $y = (\frac{a-1}{3})^x$ افزایشی (صعودی) باشد.	
۲۰	جمع بارم	

پاسخ سؤال ۱: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

$$|x-2|=3 \Rightarrow x-2=\pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow -1+5=4$$

الف) ۴

$$y-2x=3 \Rightarrow y=2x+3 \Rightarrow \text{شیب} = 2 \Rightarrow \text{شیب خط عمود} = -\frac{1}{2}$$

ب) $-\frac{1}{2}$

$$x^2 - 10x + 23 = 0 \quad \text{ج)}$$

$$\frac{1}{f} = \left\{ \left(2, \frac{1}{5}\right), \left(7, \frac{1}{3}\right), \left(-1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right\} \quad \text{د)}$$

(حسابان یازدهم، صفحه‌های ۸، ۹، ۱۱، ۳۵ و ۳۹)

پاسخ سؤال ۲: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

د) نادرست ($x = -2$)

ج) درست

ب) نادرست

الف) نادرست

(حسابان یازدهم، صفحه‌های ۲۱، ۴۰، ۵۳ و ۶۱)

پاسخ سؤال ۳: (۱/۵ نمره)

$$a_1 = 2, d = 2 \quad \text{(نمره ۲۵/۰)}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow \frac{n}{2}(4 + (n-1)2) > 110 \Rightarrow \frac{n}{2}(2n+2) > 110 \quad \text{(نمره ۵/۰)}$$

$$n^2 + n - 110 > 0 \Rightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+440}}{2} = -11, 10 \quad \left| \begin{array}{c} -11 \\ + \\ 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 10 \\ - \\ 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} n \in \mathbb{N} \\ \rightarrow n > 10 \end{array} \right| \Rightarrow n \text{ حداقل } = 11 \quad \text{(نمره ۲۵/۰)}$$

(حسابان یازدهم، صفحه‌های ۳ و ۴)

پاسخ سؤال ۴: (۱/۲۵ نمره)

با توجه به مشخص بودن رأس سهمی، ضابطه سهمی به صورت زیر است:

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

$$\begin{cases} \text{طول رأس سهمی: } h: f(x) = a(x-2)^2 - 1 \Rightarrow fa - 1 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{f} \quad \text{(نمره ۲۵/۰)} \\ \text{عرض رأس سهمی: } k: f(0) = 1 \quad \text{(نمره ۲۵/۰)} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 1 = \frac{1}{4}(x^2 - 4x + 4) - 1 = \frac{1}{4}x^2 - x + 1 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -2 \quad \text{(نمره ۲۵/۰)} \\ c = 1 \quad \text{(نمره ۲۵/۰)} \end{cases}$$

(حسابان یازدهم، صفحه‌های ۱۶ و ۱۱)

پاسخ سؤال ۵: (۱/۵ نمره)

$$x^2 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4 \quad \text{(نمره ۲۵/۰)}, P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-2}{1} = -2 \quad \text{(نمره ۲۵/۰)}$$

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله جدید را محاسبه می‌کنیم.

$$S_{\text{جدید}} = \alpha + 1 + \beta + 1 = \alpha + \beta + 2 = S + 2 = 4 + 2 = 6 \quad \text{(نمره ۲۵/۰)}$$

$$P_{\text{جدید}} = (\alpha+1)(\beta+1) = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = P + S + 1 = -2 + 4 + 1 = 3 \quad \text{(نمره ۲۵/۰)}$$

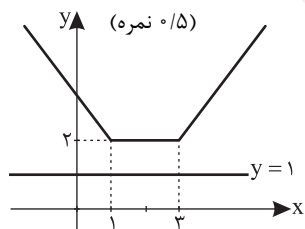
$$x^2 - Sx + P = 0 \quad \text{(نمره ۲۵/۰)} \Rightarrow x^2 - 6x + 3 = 0 \quad \text{(نمره ۲۵/۰)}$$

(حسابان یازدهم، صفحه ۱۵)

پاسخ سؤال ۶: (۱/۲۵ نمره)

نمودار توابع $y=1$ و $y=|x-3|+|x-1|$ را رسم کرده و برخورد آنها را بررسی می‌کنیم.

$$y = |x-3| + |x-1| \quad \text{(نمره ۵/۰)}$$



$$|x-3| + |x-1| = 1 \Rightarrow y = |x-3| + |x-1| = \begin{cases} x-3+x-1=2x-4 & x \geq 3 \\ -x+3+x-1=2 & 1 < x < 3 \quad \text{(نمره ۵/۰)} \\ -x+3-x+1=-2x+4 & x \leq 1 \end{cases}$$

خط $y=1$ نمودار تابع $y=|x-3|+|x-1|$ را قطع نمی‌کند، پس معادله جواب ندارد. (نمره ۲۵/۰)

(حسابان یازدهم، صفحه ۲۴)

پاسخ سؤال ۷: (۱/۷۵) (نمره)

الف) $\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)} = 3 \xrightarrow{x \neq 1} 1 + 2(x-1) = 3(x-1)^2$
(نمره ۰/۲۵)

$(x-1) = t \Rightarrow 3t^2 - 2t - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow x-1=1 \Rightarrow x=2 \\ t=-\frac{1}{3} \Rightarrow x-1=-\frac{1}{3} \Rightarrow x=\frac{2}{3} \end{cases}$ (نمره ۰/۵)
(نمره ۰/۲۵)

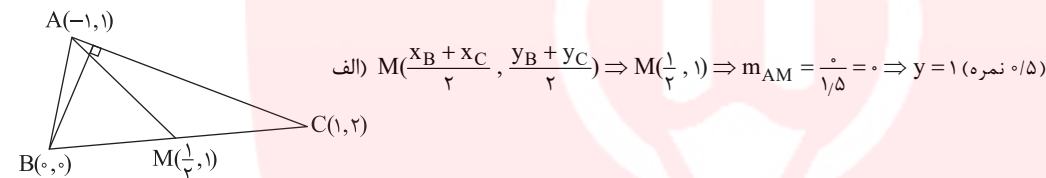
ب)

$\left. \begin{aligned} x^2 - 9 = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \quad (1) \\ x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \cup x \leq -3 \quad (2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (1) \cap (2) = \emptyset$ (نمره ۰/۲۵)
(نمره ۰/۲۵)

معادله جواب ندارد.

(حسابان یازدهم، صفحه ۱۹)

پاسخ سؤال ۸: (۱/۷۵) (نمره)



ب) $m_{AC} = \frac{2-1}{1+1} = \frac{1}{2}$ (نمره ۰/۲۵)

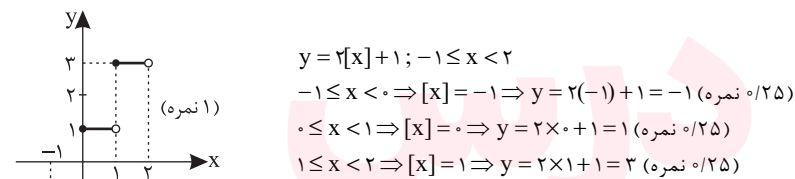
$y-1 = \frac{1}{2}(x+1) \Rightarrow y-1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ (نمره ۰/۵)

$2y = x + 3 \Rightarrow 2y - x - 3 = 0$

$BH = \frac{|2y - x - 3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ (نمره ۰/۲۵)
(نمره ۰/۲۵)

(حسابان یازدهم، صفحه ۳۶)

پاسخ سؤال ۹: (۱/۷۵) (نمره)



نمودار تابع به صورت مقابل است.

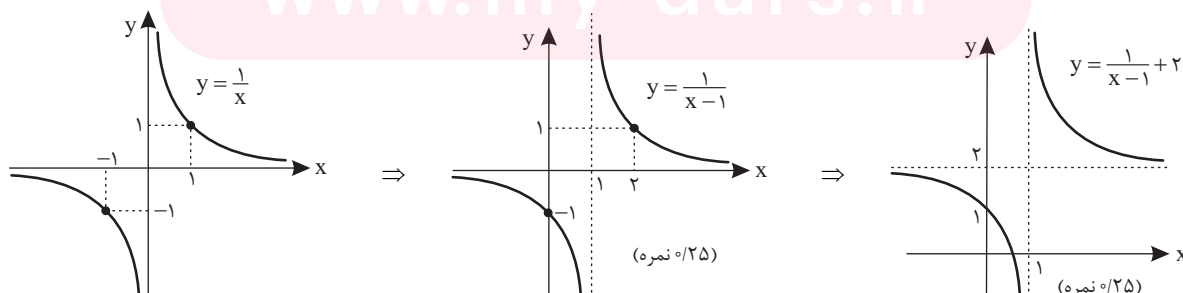
(حسابان یازدهم، صفحه های ۴۹ و ۵۱)

پاسخ سؤال ۱۰: (۱) (نمره)

الف)

$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y = \frac{1}{x-1} \Rightarrow y = \frac{1}{x-1} + 2$
(نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۲۵)

ب)



(حسابان یازدهم، صفحه های ۴۵ و ۵۲)

پاسخ سؤال ۱۱: (۱/۲۵) (نمره)

$$y = \sqrt{x-2} - 1$$

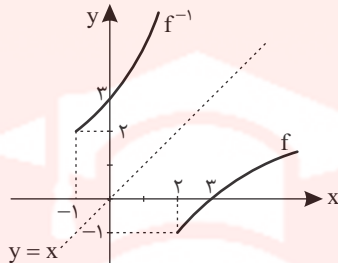
الف) $y_1 = y_2 \Rightarrow \sqrt{x_1-2} - 1 = \sqrt{x_2-2} - 1 \Rightarrow \sqrt{x_1-2} = \sqrt{x_2-2} \Rightarrow x_1 - 2 = x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2$ (نمره ۰/۲۵)

ب) $y+1 = \sqrt{x-2} \Rightarrow x-2 = (y+1)^2 \Rightarrow x = (y+1)^2 + 2$

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = (x+1)^2 + 2 & \text{(نمره ۰/۵)} \\ D_{f^{-1}} = R_f = [-1, +\infty) \end{cases}$$

ج) $(2, -1) \in f \Rightarrow (-1, 2) \in f^{-1}$

$(3, 0) \in f \Rightarrow (0, 3) \in f^{-1}$



(با رسم شکل نیز یک به یک بودن تابع را می توان نشان داد)

(نمره ۰/۵)

(حسابان یازدهم، صفحه های ۵۵، ۵۹ و ۶۳)

پاسخ سؤال ۱۲: (۱/۲۵) (نمره)

اعمال جبری فقط در دامنه مشترک انجام می شود.

$2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_g = [0, 2]$ (نمره ۰/۲۵)

$D_f \cap D_g = \{1, 2\}$ (نمره ۰/۲۵)

$g(1) = 1, g(2) = 0$ (نمره ۰/۲۵)

$f = \{(2, 1), (1, -3), (-1, 2), (-3, 2), (4, -3)\}$

$f \times g = \{(2, 0), (1, -3)\}$ (نمره ۰/۲۵)

$f - g = \{(2, 1), (1, -4)\}$ (نمره ۰/۲۵)

(حسابان یازدهم، صفحه ۷۰)

پس مقدار تابع g را در دامنه مشترک با f به دست می آوریم.

پاسخ سؤال ۱۳: (۱/۷۵) (نمره)

الف) $D_g = (-\infty, \delta], D_f = \mathbb{R} - \{4\} \Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \Rightarrow D_{f \circ g} = (-\infty, \delta] - \{-1\}$

$$\begin{cases} \delta \geq x & \sqrt{\delta-x} \neq 4 \\ \delta-x \neq 16 & \delta-x \neq 16 \\ x \neq -1 & x \neq -1 \end{cases} \quad \text{(نمره ۰/۲۵)}$$

$f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{\delta-x}-4}$ (نمره ۰/۵)

ب) $g(f(\delta)) = g(1) = \sqrt{\delta-1} = 2$ (نمره ۰/۲۵)

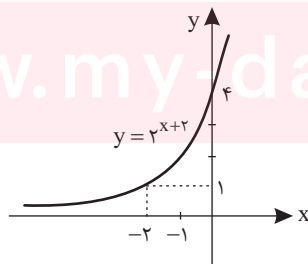
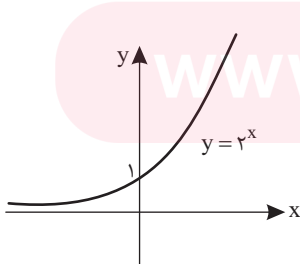
(حسابان یازدهم، صفحه ۶۹)

پاسخ سؤال ۱۴: (۲) (نمره)

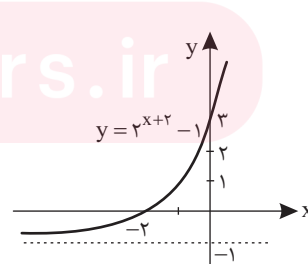
الف) $((2)^{\frac{1}{3}})^{x-2} < 2^{-2x}$ (نمره ۰/۲۵)

$\Rightarrow 2^{\frac{1}{3}(x-2)} < 2^{-2x} \Rightarrow \frac{1}{3}x - 1 < -2x \Rightarrow \frac{\delta}{3}x < 1 \Rightarrow x < \frac{3}{\delta}$ (نمره ۰/۵)

ب)



(نمره ۰/۲۵)



(نمره ۰/۵)

ج) $\frac{a-1}{3} > 1 \Rightarrow a > 4$ (نمره ۰/۵)

(حسابان یازدهم، صفحه ۷۸)