

پیشامدها مستقل و وابسته :

دو پیشامد مستقل از هم هستند هرگاه هیچ تأثیری روی یکدیگر نداشته باشند. به عبارت دیگر A مستقل از B است هرگاه آگاهی از وقوع B در احتمال رخ دادن A بی تأثیر باشد یعنی $P(A|B) = P(A)$ ، همچنین وقوع A نیز روی B تأثیری نداشته باشد یعنی $P(B|A) = P(B)$ باشد. در غیر این صورت دو پیشامد وابسته اند.

به طور مثال جنسیت فرزند اول یک خانواده تأثیری در جنسیت فرزند دوم آن ندارد، اگر فرزند اول پسر باشد، فرزند دوم ممکن است پسر یا دختر باشد لذا جنسیت فرزند اول و جنسیت فرزند دوم دو پیشامد مستقلند.
 مثال: یک تاس را دو مرتبه به طور پی در پی پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد ظاهر شدن عدد ۵ در مرتبه اول و B پیشامد آن که حاصلضرب دو عدد ظاهر شده ۱۰ باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

$$A = \{(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\} \Rightarrow n(A) = 6 \xrightarrow{n(S)=36} P(A) = \frac{1}{6}$$

$$B = \{(2,5), (5,2)\} \Rightarrow n(B) = 2 \xrightarrow{n(S)=36} P(B) = \frac{1}{18}$$

$$A \cap B = \{(5,2)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1 \xrightarrow{n(S)=36} P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{18}} = \frac{1}{2} \Rightarrow P(A|B) \neq P(A) \Rightarrow A \text{ و } B \text{ وابسته اند}$$

نکته مهم: دو پیشامد A و B مستقلند اگر و تنها اگر $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

مثال: اگر $S = \{a, b, c, d\}$ ، $A = \{a, b\}$ ، $B = \{b, c\}$ ، A و B دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند؟

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}, A \cap B = \{b\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow A \text{ و } B \text{ مستقلند}$$

مثال: احتمال قبولی زهرا در درس فیزیک، ۹۰٪، و احتمال قبولی ریچانه در این درس ۷۰٪ است.

الف) احتمال اینکه هر دو در این درس قبول شوند چقدر است؟

قبول شدن هر کدام مستقل از دیگری است. اگر پیشامد قبولی زهرا را با Z و ریچانه را با R نمایش دهیم، آنگاه احتمال

$$P(Z \cap R) = P(Z) \times P(R) = \frac{90}{100} \times \frac{70}{100} = 63\% \quad \text{قبول شدن هر دو همان } P(Z \cap R) \text{ است:}$$

ب) با چه احتمالی حداقل یکی از آنها در این درس قبول می‌شوند؟

احتمال قبولی حداقل یکی از آنها $P(Z \cup R)$ است:

$$P(Z \cup R) = P(Z) + P(R) - P(Z \cap R) = \frac{90}{100} + \frac{70}{100} - \frac{62}{100} = 0.97$$

مسئله: یک سکه و یک تاس را به طور هم زمان پرتاب می‌کنیم. فرض کنید A پشیماد ۴ آمدن تاس و B پشیماد رو شدن سکه باشد. آیا دو پشیماد A و B مستقلند؟

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$A = \{(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6)\} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\} \Rightarrow P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$A \cap B = \{(1,6)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \rightarrow A, B \text{ مستقلند}$$

مسئله: در پرتاب یک تاس، A پشیماد رو آمدن عدد زوج و B پشیماد رو آمدن عدد اول است. آیا دو پشیماد A و B مستقلند؟

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(S) = 6$$

$$A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow n(A) = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad B = \{2, 3, 5\} \Rightarrow n(B) = 3 \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

$$A \cap B = \{2\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B) \Rightarrow A, B \text{ وابسته اند}$$

مسئله: اگر A و B دو پشیماد مستقل باشند به طوری که $P(A \cap B) = 0.05$ و $P(A \cap B') = 0.04$ ، حاصل $P(A \cup B')$ را به دست آورید.

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.04 = P(A) - 0.05 \Rightarrow P(A) = 0.09$$

$$A, B \text{ مستقلند} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow 0.05 = 0.09 \times P(B) \Rightarrow P(B) = 0.055 \Rightarrow P(B') = 1 - 0.055 = 0.945$$

$$\Rightarrow P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = 0.09 + 0.945 - 0.04 = 0.995$$

تست (سراسری ۹۱): دو پیغام A و B مستقل و $P(A-B) = \frac{1}{3}$ و $P(B-A) = \frac{1}{6}$ هستند. $P(A \cup B)$ کدام است؟

$$1 \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{5}{6}$$

گیریم $P(A \cap B) = x$ پس:

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{1}{3} = P(A) - x \Rightarrow P(A) = x + \frac{1}{3}$$

$$P(B-A) = P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{1}{6} = P(B) - x \Rightarrow P(B) = x + \frac{1}{6}$$

A, B مستقلند $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow x = (x + \frac{1}{3})(x + \frac{1}{6}) \Rightarrow 18x^2 - 9x + 1 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3} \quad , \quad x = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = x + \frac{1}{3} + x + \frac{1}{6} - x = x + \frac{1}{2}$$

بین گزینه‌ها، گزینه بی‌اشک است.

مثال: از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره آبی و ۸ مهره قرمز است، دو مهره به صورت پی در پی و بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم. اگر A پیغام آبی بودن مهره اول و B پیغام قرمز بودن دومین مهره باشد،

الف) احتمال رخداد پیغامها A و B را حساب کنید.

$$P(A) = \frac{5}{13}$$

مهره اول آبی $\xrightarrow{\frac{8}{12}}$ مهره دوم قرمز $\Rightarrow P(B) = \frac{5}{13} \times \frac{8}{12} + \frac{8}{13} \times \frac{5}{12} = \frac{8}{13}$

مهره اول قرمز $\xrightarrow{\frac{5}{12}}$ مهره دوم آبی

ب) احتمال اینکه هر دو پیغام درخ دهند، چقدر است؟

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{5}{13} \times \frac{8}{12} = \frac{10}{39}$$

پ) پیغامهای A و B مستقلند یا وابسته؟

$$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B) \Rightarrow A, B \text{ وابسته اند}$$

نکته: در حالت کلی انتخاب هایی که با جایگذاری انجام می‌شوند، مستقل هستند

سؤال: ظرفی شامل ۲ مهره سفید، ۳ مهره سیاه است. دو مهره پی در پی و با جایگذاری بیرون می‌آوریم. مطلوب است احتمال آن که:

الف) مهره اول سفید و مهره دوم سیاه باشد.

$$P(\text{دوم سیاه} \cap \text{اول سفید}) = P(\text{اول سفید}) \times P(\text{دوم سیاه}) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$$

ب) هر دو مهره سفید باشند.

$$P(\text{دوم سفید} \cap \text{اول سفید}) = P(\text{اول سفید}) \times P(\text{دوم سفید}) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$$

سؤال: مسئله‌ی سؤال قبل را در حالت بدون جایگذاری حل کنید.

$$\text{الف) } P(\text{دوم سیاه} \cap \text{اول سفید}) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$$

وقتی در مرحله‌ی اول یک مهره سفید برآید، تعداد مهره‌ها ۴ می‌ماند و ۱ سفید و ۳ سیاه خواهد بود.

$$\text{ب) } P(\text{دوم سفید} \cap \text{اول سفید}) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$$

تعمیم: سه بیاباد A, B, C را مستقل گوئیم هرگاه دو به دو مستقل بوده و احتمال رخداد هر سه برابر با

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

ضرب احتمال رخداد تک تک آنها باشد. عبارت دیگر:

به همین ترتیب می‌توان آن را برای n بیاباد تعمیم داد.

سؤال: اگر $S = \{a, b, c, d\}$ فضای نمونه و $A = \{a, b\}$ و $B = \{b, c\}$ و $C = \{b, d\}$ ، آنگاه تعیین کنید، کدامیک از بیابادها مستقل از هم هستند؟ آیا می‌توان گفت هر سه بیاباد مستقل از یکدیگرند؟

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$$A \cap B = \{b\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow A, B \text{ مستقل از یکدیگرند}$$

$$A \cap C = \{b\} \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A \cap C) = P(A) \times P(C) \Rightarrow A, C \text{ مستقل از یکدیگرند}$$

$$B \cap C = \{b\} \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(B \cap C) = P(B) \times P(C) \Rightarrow B, C \text{ مستقل از یکدیگرند}$$

$$A \cap B \cap C = \{b\} \Rightarrow P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \times P(B) \times P(C) \Rightarrow A, B, C \text{ وابسته‌اند}$$

سؤال: خانواده ای ۴ فرزند دارد. مطلوبست احتمال اینکه:

الف) ۴ فرزند این خانواده دختر باشند.

ب) توجه به مستقل بودن جنسیت فرزندان داریم:

$$P(> > > >) = P(>) \times P(>) \times P(>) \times P(>) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

ب) فقط فرزند اول و آخر این خانواده دختر باشند.

$$P(> > > >) = P(>) \times P(>) \times P(>) \times P(>) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

پ) فرزند اول و آخر این خانواده دختر باشند.

در مورد دیر فرزندان صحبتی نشده است پس بدین توجه به آنرا احتمال را حساب می‌کنیم:

$$P(> >) = P(>) \times P(>) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

ت) دو فرزند این خانواده دختر باشند.

وجود دو دختر در این خانواده ۶ به $\binom{4}{2} = 6$ حالت میسر است. به طور مثال پ، پ، د، د یا به صورت

پ، د، پ، د یا ... که همه دارای احتمال $\frac{1}{16}$ هستند، لذا احتمال $\frac{1}{16}$ را حساب کرده و در ۶ ضرب

$$P(> > > >) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow P(\text{دو فرزند خانواده دختر باشند}) = 6 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$$

ث) فرزندان یک در میان دختر و پسر باشند.

$$P(> > > >) + P(> > > >) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

ج) حداقل یکی از فرزندان دختر باشد.

$$P(\text{حداقل یک دختر}) = 1 - P(\text{پ، پ، پ، پ}) = 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{15}{16}$$

چ) حداکثر یکی از فرزندان دختر باشد.

$$\begin{aligned}
 P(\text{فقط یک دختر}) + P(\text{هیچ دختر}) &= 4 \times P(> > > >) + P(\text{پ، پ، پ، پ}) \\
 &= 4 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{16}
 \end{aligned}$$

نکته مهم: اگر A و B دو پدیده مستقل باشند، آنگاه هر کدام مستقل از متمم دیگری خواهد بود. به عبارت دیگر A و B' مستقل، A' و B نیز مستقل می باشند.



اثبات: کافیت با فرض $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ نشان دهیم $P(A \cap B') = P(A) \times P(B')$

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \times P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A) \times P(B')$$



نتیجه مهم: اگر A و B دو پدیده مستقل باشند آنگاه A' و B' نیز مستقلند.

اثبات: طبق نتیجه قبلی هرگاه دو پدیده مستقل باشند، آنگاه هر کدام با متمم دیگری مستقل است بنابراین:

$$B' \text{ هم با متمم } A \text{ نیز مستقل است} \Rightarrow A, B' \text{ مستقل} \Rightarrow A, B \text{ مستقل}$$

مسئله: اگر A و B دو پدیده مستقل و $P(A) = 0.2$ و $P(B) = 0.7$ مطلوب است $P(A \cup B')$.

$$P(A \cap B') = P(A) \times P(B') = 0.2 \times (1 - 0.7) = 0.06$$

$$\Rightarrow P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = 0.2 + (1 - 0.7) - 0.06 = 0.44$$

مسئله: احتمال اینکه رضا در کنکور قبول شود ۰.۵ و احتمال اینکه در آزمون رانندگی قبول شود ۰.۶ است.

الف) احتمال اینکه رضا در کنکور قبول نشود و در رانندگی قبول نشود چقدر است؟

پدیده قبولی در کنکور را با k و پدیده قبولی در آزمون رانندگی را با R نمایش می دهیم بنابراین:

$$P(k \cap R') = P(k) \times P(R') = 0.5 \times (1 - 0.6) = 0.15$$

ب) احتمال اینکه فقط در رانندگی قبول شود چقدر است؟

$$P(k \cap R') + P(k' \cap R) = P(k) \times P(R') + P(k') \times P(R)$$

$$= 0.5 \times (1 - 0.6) + (1 - 0.5) \times 0.6 = 0.15 + 0.3 = 0.45$$

پ) احتمال اینکه حداقل در یکی قبول شود چقدر است؟

$$P(k \cup R) = P(k) + P(R) - P(k \cap R) = 0.5 + 0.6 - 0.5 \times 0.6 = 0.7$$

مسائل پایانی:

۱- سه تاس پرتاب می‌کنیم با چه احتمالی فقط تاس دوم ۴ می‌آید؟

$$\begin{aligned}
 P(\text{تاس سوم ۴ نیاید}) \times P(\text{تاس دوم ۴ نیاید}) \times P(\text{تاس اول ۴ نیاید}) &= P(\text{فقط تاس دوم ۴ بیاید}) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{6}\right) \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{25}{216}
 \end{aligned}$$

۲- در پرتاب ۳ سکه با چه احتمالی فقط دو سکه رو می‌آید؟

قرار گرفتن دو رو در پرتاب ۳ سکه به $\binom{3}{2} = 10$ حالت امکان پذیر است. همه دارا احتمال‌های یکسانی هستند به طور مثال:

$$P(\text{پ، پ، پ، ر، ر}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

$$\Rightarrow P(\text{فقط دو رو}) = 10 \times \frac{1}{32} = \frac{5}{16}$$

۳- سه دستگاه مستقل از یکدیگر به ترتیب با احتمال‌های $\frac{3}{4}$ ، $\frac{4}{5}$ و $\frac{5}{6}$ کار می‌کنند. با چه احتمالی دست کم یکی از دستگاه‌ها کار می‌کنند؟

دستگاه‌ها را به ترتیب A، B، C می‌نامیم بنابراین:

$$P(A) = \frac{3}{4} \quad \text{و} \quad P(B) = \frac{4}{5} \quad \text{و} \quad P(C) = \frac{5}{6}$$

$$\begin{aligned}
 P(\text{دست کم یکی کار کنند}) &= P(A \cup B \cup C) = 1 - P((A \cup B \cup C)') \\
 &= 1 - P(A' \cap B' \cap C') \\
 &= 1 - P(A') \times P(B') \times P(C') \\
 &= 1 - \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times \left(1 - \frac{5}{6}\right) = \frac{119}{120}
 \end{aligned}$$

۴- احتمال آنکه احسان، مجرام و سلمان بتوانند یک پرتاب را از پشت منطقه ۳ امتیازی در بسکتبال تبدیل به گل کنند به ترتیب برابر ۳، ۲ و ۵ است. با چه احتمالی فقط یکی از آنها پرتاب خود را گل می‌کند؟

پیشامدها گل شدن توپ توسط سرتفر مستقل از هم هستند. اگر احتمال گل کردن احسان، مجرام و سلمان را به ترتیب $P(A) = \frac{3}{4}$ ، $P(B) = \frac{2}{3}$ و $P(C) = \frac{5}{6}$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{aligned}
 P(\text{فقط یکی گل کند}) &= P(A \cap B' \cap C') + P(A' \cap B \cap C') + P(A' \cap B' \cap C) \\
 &= \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left(1 - \frac{5}{6}\right) + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{5}{6}\right) + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{5}{6} = \frac{7}{12}
 \end{aligned}$$

۵- یک سکه را پرتاب می‌کنیم، اگر «رو» بیاید آن‌گاه تاس می‌زنیم، اگر «پشت» بیاید دوباره سکه را پرتاب می‌کنیم. این عمل را آن قدر ادامه می‌دهیم تا مجاز به پرتاب تاس باشیم، با کدام احتمال حد اکثر بعد از پرتاب سوم سکه، عدد تاس مضرب ۳ است؟ (سراسری ۹۴)

حالت اول: بار اول سکه رو بیاید $(\frac{1}{2})$ و تاس مضرب ۳ یعنی ۳ یا ۶ بیاید $(\frac{2}{6})$ ، احتمال آن $P_1 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

حالت دوم: سکه اول پشت $(\frac{1}{2})$ ، سکه دوم رو $(\frac{1}{2})$ و تاس مضرب ۳ $(\frac{2}{6})$ $\Rightarrow P_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{12}$

حالت سوم: سکه‌ها اول و دوم پشت $(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2})$ ، سکه سوم رو $(\frac{1}{2})$ و تاس مضرب ۳ $(\frac{2}{6})$ $\Rightarrow P_3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{24}$

$$\Rightarrow P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{7}{24}$$

۶- در جعبه‌ای ۸ لامپ موجود است که دو تای آنها معیوب هستند. به تصادف و متوالیاً این لامپ‌ها را آزمایش کرده و لامپ‌ها سالم را کنار می‌گذاریم تا اولین لامپ معیوب پیدا شود. با کدام احتمال در آزمایش سوم، اولین لامپ معیوب پیدا می‌شود؟ (سراسری ۹۵)

چون لامپ معیوب در سومین بار بیرون آمده یعنی در دو بار قبلی سالم و بار سوم معیوب است بنابراین:

$$P = \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{4}{28}$$

۷- اگر دو پیامد A و B چهار عضوی و اشتراک این دو، ۲ عضو باشد و بدانیم A و B مستقلند، فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟

گیریم فضای نمونه‌ای دارای n عضو باشد بنابراین: $P(A) = P(B) = \frac{4}{n}$ و $P(A \cap B) = \frac{2}{n}$

$$A, B \text{ مستقلند} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow \frac{2}{n} = \frac{4}{n} \times \frac{4}{n} \Rightarrow 1 = \frac{4}{n} \Rightarrow n = 4$$

۹- دو شخص A و B به ترتیب هر یک ۲ سکه پرتاب می‌کنند. اولین شخصی که در پرتاب دو سکه هر دو را رو ظاهر کند، برنده است. چقدر احتمال دارد B برنده شود؟

اگر A هر دو سکه را رو بیورد برنده است و نوبت به B نرسد، برای اینکه B برنده شود، A نباید هر دو سکه را رو بیورد در B باید هر دو را رو بیورد. بنابراین:

$$P = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

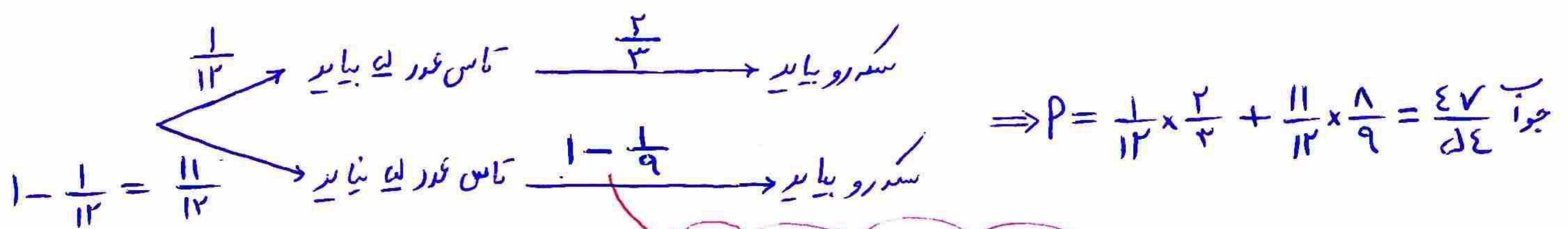
۱۰- در تاسی ناهمگن احتمال آمدن هر عدد زوج سه برابر عدد فرد است. و در سکه ای ناهمگن احتمال آمدن رو دو برابر پشت است. تاس را به هوا پرتاب می کنیم اگر که نباید سکه را یک بار به هوا اندازیم، در غیر این صورت سکه را دو بار به هوا پرتاب می کنیم. احتمال مشاهده رو در این آزمایش چقدر است؟

$$P(1) = P(3) = P(5) = x$$

$$P(2) = P(4) = P(6) = 3x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 1 \\ 12x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{12} \Rightarrow P(5) = \frac{1}{12} \end{array} \right.$$

$$P(\text{پ}) = y \text{ و } P(\text{ر}) = 2y \quad \frac{P(\text{پ}) + P(\text{ر}) = 1}{3y = 1} \Rightarrow y = \frac{1}{3} \Rightarrow P(\text{ر}) = \frac{2}{3} \text{ و } P(\text{پ}) = \frac{1}{3}$$



$$P(\text{تاس عدد ۵ بیاید}) = 1 - P(\text{تاس عدد ۱-۴ بیاید}) = 1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$$

۱۱- چند پیامد مانند B مستقل از پیامد A در پرتاب دو تاس وجود دارد به طوریکه $A \cap B = \{(6,6)\}$ ؟

$$P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{36} \quad \frac{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}{\frac{1}{36} = \frac{1}{3} \times P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{36}$$

یعنی پیامد B سه عضوی است و یک عضو آن (6,6) می باشد. پس دو عضو دیگر آن نباید در A باشند یعنی

باید از $36 - 12 = 24$ عضو دیگر نفعار نمونه از انتخاب شوند که تعداد حالات آن $\binom{24}{2} = 276$ است.

۱۲- نشان دهید اگر دو پیامد A, B مستقل و ناسازگار باشند، حداقل یکی از آنها خنثی است.

$$A, B \text{ مستقل} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$A, B \text{ ناسازگار} \Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A) \times P(B) = 0$$

$$\Rightarrow P(A) = 0 \vee P(B) = 0 \Rightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$$

