درس اوّل: آشنایی با منطق ریاضی

منطق ریاضی

دستور زبان ریاضی است که به کمک آن می‌توان مفهوم جمله‌هایی که در ریاضی به‌کار برده می‌شود را بهتر درک کرد.
در ریاضیات و علوم کامپیوتر اکثراً با جملاتی روبه‌رو هستیم که درستی یا نادرستی آن‌ها به وضوح معلوم نیست. لذا مطالعهٔ گزاره‌ها و گزاره‌نماها دارای اهمیت است.

گزاره

یک جملهٔ خبری که یا راست و یا دروغ است ولی هردو نه. (اگرچه درستی یا نادرستی آن فعلاً بر ما معلوم نباشد)
جملات قابل قبول در ریاضی، جملاتی هستند که یا درست هستند یا نادرست یا لااقل بتوان درستی یا نادرستی آن را با داشتن اطلاعات کافی به وضوح مشخص کرد. مثلاً جملهٔ «اگر x و y فرد باشند، $x+y$ فرد است» از دیدگاه ریاضی قابل قبول است و یک جملهٔ غلط می‌باشد زیرا حاصل هر دو عدد فرد، عددی زوج است. اما جملهٔ «این عدد قشنگ است» از نظر ریاضی قابل قبول نیست.

قضیه: گزاره‌ای که درستی آن را بتوان در یک سیستم اثبات کرد.

متغیر گزاره‌ای: حرف یا علامتی است که اسم چیز معینی نیست، بلکه اسم مبهمی برای هریک از اشیاء مجموعهٔ مشخصی است. که به آن متغیر می‌گویند این مجموعه را دامنهٔ متغیر گویند. مثلاً در جملهٔ «x ریاضی‌دان است» دامنه می‌تواند مجموعهٔ تمام انسان‌ها باشد.
اگر x حافظ باشد نادرست و اگر x دکارت باشد درست است. (x متغیر است)

تعریف گزاره‌نما: جمله‌ای خبری که دارای یک یا چند متغیر است و ارزش آن بر ما معلوم نیست (x زوج است).

دامنه متغیر: مجموعه مقادیری که می‌توان به جای متغیرها قرارداد تا ارزش یک گزاره‌نما تبدیل به گزاره شود و آن را با D نشان می‌دهیم.

مثال:

گزاره بودن جملات زیر را بررسی کنید و درصورت گزاره بودن ارزش آن را تعیین کنید.

الف) علی در درس شیمی قبول می‌شود یا در درس ریاضی نمره قبولی نمی‌آورد.

ب) $x^2=1$ پ) این برنامه بد است. ت) چنین نیست که ۵ عددی اول است.

پاسخ:

الف) گزاره است و ارزش آن معلوم نیست. ب) گزاره نیست.

پ) گزاره نیست. ت) گزاره است و ارزش آن نادرست است.

ترکیب عطفی دو گزاره

اگر p و q دو گزاره باشند، آن‌گاه با حرف «و» می‌توان گزاره مرکبی به‌صورت $p \wedge q$ تشکیل داد که آن را ترکیب عطفی p و q می‌نامیم.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

مثال:

ارزش گزاره «π عددی اصم است و $\sqrt{2}$ عددی گویا است» را مشخص کنید.

پاسخ: گزاره «π عددی اصم است»، درست و گزاره «$\sqrt{2}$ عددی گویا است»، نادرست است.

بنابراین ارزش ترکیب عطفی دو گزاره نادرست است.

ترکیب فصلی

اگر p و q دو گزاره باشند، آن‌گاه با حرف «یا» می‌توان گزاره مرکبی به صورت $p \vee q$ تشکیل داد که آن را ترکیب فصلی می‌نامیم.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

مثال:

ارزش گزاره « ۱۷ عددی اول است یا خیام فیزیکدان است» را مشخص کنید.

پاسخ: ارزش گزاره «۱۷ عددی اول است»، درست و ارزش گزاره «خیام فیزیکدان است»، نادرست است.

بنابراین ارزش ترکیب فصلی درست است.

نقیض

نقیض یک گزاره، گزاره‌ای است که ارزش گزاره اول را نفی کند. اگر p درست باشد، $\sim p$ نادرست است.

p	$\sim p$
T	F
F	T

به‌طور مثال: نقیض گزارهٔ «$2k$ عددی زوج است» را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

(چنین نیست که $2k$ عددی زوج باشد) یا ($2k$ عددی زوج نیست).

ترکیب شرطی

اگر p و q دو گزاره باشند به‌طوری‌که q از p نتیجه شود یا p، q را نتیجه دهد، گوییم: گزاره p به شرط q و یا اگر p آن‌گاه q.

ملاحظه می‌کنید که هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره شرطی درست است. در این حالت می‌گوییم ارزش «$p \Rightarrow q$» به انتفای مقدم درست است.

$$(\underbrace{p}_{\text{مقدم}} \Rightarrow \underbrace{q}_{\text{تالی}})$$

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ترکیب دوشرطی

گزاره‌های $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را گزارهٔ دو شرطی می‌نامیم و با علامت $p \Leftrightarrow q$ نمایش می‌دهیم و می‌گوییم «اگر p، آن‌گاه q و برعکس» «p شرط لازم و کافی برای q است» یا «p اگر و تنها اگر q».

اگر $p \Leftrightarrow q$ درست باشد گوییم p و q هم‌ارز هستند، یعنی ارزش یکسانی دارند.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

مثال:

ارزش گزاره «اگر x زوج باشد، $x+1$ فرد است و برعکس» را مشخص کنید.

پاسخ: $\underbrace{\text{اگر } x \text{ زوج باشد}}_{\text{درست}}$، $\underbrace{x+1 \text{ فرد است}}_{\text{درست}}$ و برعکس.

بنابراین هر دو گزاره هم‌ارزش هستند، پس ترکیب دو شرطی آنها نیز درست است.

سورها

جملات شامل متغیر لزوماً گزاره نیستند یعنی نمی‌توان درستی یا نادرستی آن‌ها را بیان کرد. مثلاً، «عدد $x+2$ یک عدد صحیح است» نمادهایی هستند که وقتی در ابتدای گزاره نماها واقع شوند گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد می‌کنند.

گزاره نما $x^2 = 1$

گزاره نادرست $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 1$

دو نوع سور داریم:

۱. سور عمومی

۲. سور وجودی

سور وجودی، برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نماد ریاضی به جای «به‌ازای بعضی مقادیر» یا «وجود دارد» از نماد $(\exists)$ استفاده می‌شود. مثلاً اگر برای xای $P(x)$ درست باشد می‌نویسیم $\exists x ; P(x)$.

سور عمومی، «به‌ازای هر» یا «به‌ازای جمیع مقادیر» از نماد $(\forall)$ استفاده می‌کنیم. مثلاً اگر برای تمام xها $P(x)$ برقرار باشد، می‌نویسیم: $\forall x ; P(x)$.

نقیض سور، هرگاه $[\forall x ; P(x)]$ درست باشد آن‌گاه $\sim[\forall x ; P(x)]$ نادرست است.

معمولاً برای نقیض کردن یک گزاره فعل آن را منفی می‌کنیم. اکنون گزاره «هر آسیایی، ایرانی است» را در نظر می‌گیریم. برای نوشتن نقیض آن فعل جمله را منفی می‌کنیم که در این صورت دوباره به یک گزاره نادرست می‌رسیم. بنابراین ارزش هر دو گزاره نادرست است که این غیرممکن است. پس برای نقیض «هر آسیایی ایرانی است»، باید بنویسیم: بعضی از آسیایی‌ها ایرانی نیستند.

تمرین‌های امتحانی

۱. **گزاره بودن یا نبودن عبارات زیر را مشخص کنید. سپس ارزش هر گزاره را بنویسید.**

الف. شیراز شهری در استان فارس است.

ب. به مهمانی ما بیا.

پ. هوا بارانی است.

ت. در مریخ جاندار باشعور وجود ندارد.

ث. آسمان غنی است.

ج. ماه از پنیر آبی به‌وجود آمده است.

چ. ۱+۲ برابر ۵ می‌شود.

ح. حال شما چطور است؟

۲. **جدول ارزش گزارهٔ مرکب مقابل را تشکیل دهید.** $\sim[(\sim p) \wedge (\sim q)]$

۳. **کدام‌یک از جملات زیر گزاره هستند؟**

الف. در ۷ ژانویه ۱۴۴۲ در قسمتی از فلوریدا برف بارید.

ب. ارسطو پاهای پهنی داشت.

پ. علی و جمشید بچه‌های خوبی هستند.

ت. همیشه کمربند صندلی‌تان را محکم ببندید.

ث. بعضی از موسیقی‌های شوپن را بتهون نوشته است.

ج. روی چمن راه نروید.

۴. **ارزش راستی هریک از گزاره‌های داده شده در زیر را با استفاده از جدول تعیین کنید.**

الف. $\sim(\sim p)$ ب. $\sim[\sim(\sim p)]$ پ. $p \wedge p$ ت. $\sim(p \wedge \sim p)$

۵. **جدول ارزش گزاره‌های داده شده را تشکیل دهید.**

الف. $p \vee \sim p$ ب. $\sim(p \vee \sim p)$ پ. $(p \vee q) \vee r$

ت. $(\sim q \Rightarrow \sim q)$ ث. $\sim(\sim p \vee \sim p)$ ج. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

۶. **جدول زیر را با گزاره‌های مناسب پر کنید.**

گزاره	$\vee$ / $\wedge$	گزاره	درست	نادرست
۲ عددی زوج است	یا	....	✓	
....	و	تهران پایتخت ایران است		✓
π عددی اصم است.	....	۵ عددی اول نیست.	✓	
نیوتن کاشف الکل است.	یا	$x^۲+۱$ عبارتی مثبت است.		

۱۰. **با استفاده از یک سور، گزارهٔ (معادلهٔ $x^۲-۳x+۲=۰$ جواب دارد) را به زبان منطق بنویسید. دامنهٔ متغیر چیست؟**

۱۱. **اتحاد $(x+a)^۲=x^۲+۲ax+a^۲$ را با استفاده از سور به زبان منطقی برگردانید. دامنهٔ متغیر چیست؟**

۱۲. **درستی یا نادرستی گزاره‌های سوری زیر را مشخص کنید.**

الف. $\exists x\in\mathbb{N}\,,\,x^۲-x-۲=۰$ ☐ درست ☐ نادرست

ب. $\exists x\in\mathbb{Z}\,,۲x^۲-x=۰$ ☐ درست ☐ نادرست

پ. ارتفاع هر مثلث داخل آن قرار می‌گیرد. ☐ درست ☐ نادرست

ت. در فضای نمونهٔ S پیشامدی وجود دارد که $P(A)=۰$. ☐ درست ☐ نادرست

ث. عدد زوجی وجود دارد که اول است. ☐ درست ☐ نادرست

۱۳. **ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.**

الف. $\left((x-۱)(x+۱)=x^۲-۱\right)\wedge(۳<۵)$

ب. (۲ اول نیست) $\Leftrightarrow\left(x^۲+۱=۰\right)$

پ. اگر عدد ۹ مربع کامل باشد آن‌گاه اول نیست.

۱۴. **اگر $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,۰\le x<۷\}$ دامنهٔ متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.**

الف. $\exists x\in A\ ,\ x+۲=۶$

ب. $\forall x\in A\ ,\ x+۱\le ۵$

پ. $\exists x\in A\ ,\ x^۲+x=۰$

ت. $\exists x\in A\ ,\ x^۲+۳\le ۴$

درس دوم: مجموعه ـ زیر مجموعه

مجموعه

دسته‌ای از اشیاء کاملاً مشخص که دو به دو متمایز باشند، مجموعه می‌نامیم و به هریک از اشیاء این مجموعه عضو مجموعه می‌گوییم.

نمایش مجموعه:

هندسی (ون)

با کمک اعضا $A=\{a,b,c,d\}$

توصیفی (با نمادهای ریاضی) $A=\{x \mid x\in\mathbb{Z},\ x^{۲}=۴\}$

زیرمجموعه: دو مجموعهٔ A و B مفروض‌اند، گوئیم A زیرمجموعهٔ B است، اگر و فقط اگر هر عضو A عضو B باشد و می‌نویسیم: $A\subseteq B$

$$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x\in A \Rightarrow x\in B$$

ولی اگر A زیرمجموعه B نباشد می‌نویسیم:

$$A\not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x\in A \wedge x\notin B$$

نکته: هر مجموعهٔ n عضوی ۲^{n} زیرمجموعه دارد.

مثال:

۱. آیا اعداد بزرگ یک مجموعه است؟

پاسخ: خیر (نامشخص است) زیرا منظور از اعداد بزرگ مشخص نیست. ممکن است اعداد بزرگ‌تر از ۱ یا کمتر از ۱- یا اعداد بین ۱ و ۱- مدنظر باشد. بنابراین نمی‌تواند مجموعه باشد.

۲. دانش‌آموزان خوب شهر تهران یک مجموعه است؟

پاسخ: خیر

۳. عضوهای مجموعهٔ A را بنویسید.

$$A=\left\{x \mid x\in\mathbb{N},\ x\le ۵,\ \frac{۲^{x}+۱}{۲}\right\}$$

پاسخ:

$x=۱,۲,۳,۴,۵$

$$A=\left\{\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲},\frac{۹}{۲},\frac{۱۷}{۲},\frac{۳۳}{۲}\right\}$$

۴. مجموعهٔ A را با بیان توصیفی بنویسید.

$A=\{۴۹,\ ۶۴,\ ۸۱,\ ۱۰۰,\ ۱۲۱,\ \dots\}$

پاسخ: $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{N}, x\ge ۷, x^{۲}\right\}$

۵. تمام زیرمجموعه‌های $A=\{-۱,\{۱\},۰\}$ را بنویسید.

پاسخ:

$A_۱=\{-۱\}$ $A_۲=\{۰\}$ $A_۳=\{\{۱\}\}$ $A_۴=\{\}$ $A_۵=\{-۱,\{۱\}\}$

$A_۶=\{-۱,۰\}$ $A_۷=\{\{۱\},۰\}$ $A_۸=\{\{۱\},-۱,۰\}$

نکته: مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های A را مجموعهٔ توانی A گوییم و با $P(A)$ نشان می‌دهیم.

$$P(A)=\{A_۱,A_۲,\dots,A_۸\}$$

نکته: اگر $A_i \subseteq A$ به‌طوری‌که $A_i \neq A$ آن‌گاه A_i را زیرمجموعه محض یا سرهٔ A می‌نامیم.

به‌طور مثال: در مثال ۵ زیرمجموعهٔ A_2 و A_1 زیرمجموعهٔ سره هستند ولی A_8 ناسره می‌باشد.

نکته: هر مجموعهٔ n عضوی، $2^n - 1$ زیرمجموعهٔ سره، ۱ زیرمجموعهٔ ناسره و $2^n - 2$ زیرمجموعهٔ سرهٔ غیرتهی دارد.

مثال:

۱. اگر $A = \{a, \{a\}\}$ باشد:

الف. $P(A)$ و $P(P(A))$ را بنویسید.

ب. $P(P(P(A)))$ چند عضو دارد.

پاسخ:

الف) $P(A) = \{\{a\}, \{\{a\}\}, \varnothing, \{a, \{a\}\}\}$

$P(P(A)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{a\}\}, \{\{\{a\}\}\}, \{\{a, \{a\}\}\}, \{\{a\}, \varnothing\}, \{\varnothing, \{\{a\}\}\}, \{\{a\}, \{a, \{a\}\}\}, \cdots\}$

ب) $\underbrace{P(\underbrace{P(\underbrace{P(A)}_{4})}_{16})}_{2^{16}}$

۲. اگر تعداد عضوهای مجموعهٔ A را دو برابر کنیم، آن‌گاه ۵۶ عضو به تعداد عضوهای مجموعهٔ توانی A اضافه می‌گردد. A چند عضو دارد؟

پاسخ:

$$2^{2n} = 2^n + 56 \rightarrow 2^{2n} - 2^n - 56 = 0 \xrightarrow{2^n = x} x^2 - x - 56 = 0 \begin{cases} x = 8 \\ x = -7 \ \text{غ‌ق‌ق} \end{cases} \Rightarrow 2^n = 8 \Rightarrow n = 3$$

افراز یک مجموعه

اگر A یک مجموعهٔ ناتهی باشد. آن‌گاه مجموعهٔ $p = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ یک افراز m عضوی $(m \leq n(A))$ مجموعهٔ A است اگر شرایط زیر با هم برقرار باشد:

۱. $\forall 1 \leq i \leq m : A_i \neq \varnothing$

۲. $\forall_{i,j}\ (i \neq j : A_i \cap A_j = \varnothing)$

۳. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$

مثال:

اگر مجموعهٔ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد:

الف. تمام افرازهای ۳ عضوی A را بنویسید.

ب. تمام افرازهای ۲ عضوی A را بنویسید.

پ. تمام افرازهای یک عضوی A را بنویسید.

پاسخ:

الف) $A_1 = \{\{1\}\ \{2\}\ \{3,4\}\}$ $\quad A_2 = \{\{1,2\}\ \{3\}\ \{4\}\}$ $\quad A_3 = \{\{2\}\ \{4\}\ \{1,3\}\}$

$A_4 = \{\{1,4\}\ \{2\}\ \{3\}\}$ $\quad A_5 = \{\{2,4\}\ \{1\}\ \{3\}\}$

$A_6 = \{\{2,3\}\ \{1\}\ \{4\}\}$ $\quad$ تعداد: $\dfrac{\binom{4}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1}}{2!}$

ب) $A_1 = \{\{1\}\ \{2,3,4\}\}$ $\quad A_2 = \{\{2\}\ \{1,3,4\}\}$ $\quad A_3 = \{\{3\}\ \{1,2,4\}\}$ $\quad A_4 = \{\{4\}\ \{1,2,3\}\}$

$A_5 = \{\{2,3\}\ \{1,4\}\}$ $\quad A_6 = \{\{1,2\}\ \{3,4\}\}$ $\quad A_7 = \{\{1,3\}\ \{2,4\}\}$ $\quad$ تعداد: $\binom{4}{3} \times \binom{1}{1} + \dfrac{\binom{4}{2} \times \binom{2}{2}}{2!}$

پ) $A = \{\{1,2,3,4\}\}$ $\quad$ تعداد: $\binom{4}{4}$

روش عضوگیری

در این روش ثابت می‌کنیم مجموعه‌ای مثل A زیرمجموعهٔ مجموعه‌ای مثل B است. بدین‌ترتیب که یک عضو دلخواه مانند x متعلق به یک طرف را ثابت می‌کنیم که متعلق به طرف دیگر تساوی نیز می‌باشد.

مثال:

ثابت کنید اگر $A \cup B = B$ آن‌گاه $A \subset B$ است.

پاسخ: $x \in A \to x \in A \cup B \xrightarrow{A \cup B = B} x \in B \to A \subset B$

دو مجموعه مساوی، دو مجموعهٔ A و B را مساوی گوییم اگر و فقط اگر اعضایشان یکی باشد.

به عبارت دیگر می‌توان تساوی دو مجموعه را به صورت روبه‌رو نوشت. $A = B \Leftrightarrow \{(A \subset B) \wedge (B \subset A)\}$

نکته: تکرار اعضا و جابه‌جایی اعضا تأثیری در تساوی یا عدم تساوی ندارد. $\{۲,۱,۲,۱,۱,۲\} = \{۱,۲\}$

مجموعهٔ مرجع: مجموعهٔ M یا U برای مجموعه‌های $A_۱, A_۲, \dots, A_n$ یک مرجع است. برای یک مجموعهٔ دلخواه بی‌شمار مرجع وجود دارد.

اشتباه رایج: اگر مجموعه‌ی $A = \{a, b, \{c,d\}\}$ باشد، در شمارش تعداد اعضای این مجموعه، $\{c,d\}$ یک عضو محسوب می‌شود و نباید اعضای داخلی آن را در شمارش حساب کرد.

تمرین‌های امتحانی

۱. **اعضای مجموعه‌های زیر را بنویسید.**

$$A = \{x \in \mathbb{Z}, -۲ < x^۲ < ۲۸\}$$

$$B = \{t : t = ۳x^۲ - ۵, x \in \mathbb{N} \wedge t \le ۲۰\}$$

۲. **مجموعه‌های زیر را که با اعضا مشخص شده‌اند، توصیف کنید.**

$B = \{-۹, -۶, -۳, \dots, ۳, ۶, ۹, ۱۲, \dots, ۷۴۱\}$ $\quad$ $A = \{۷, ۸, ۹, \dots, ۷۵\}$

۳. **آیا اگر ۴ عدد طبیعی کم‌تر از ۱۰ را درنظر بگیریم، یک مجموعه می‌توان تعریف کرد؟**

۴. **مجموعهٔ $A = \{\{a\}, a, \{b,c,d\}\}$ مفروض است. آن‌گاه کدام‌یک از نتیجه‌گیری‌های زیر درست است؟**

الف. A دارای ۳ عضو است. $\quad$ ب. b عضو A است.

پ. $\{a\}$ هم عضو A است و هم زیرمجموعه A $\quad$ ت. $\{b\}$ زیرمجموعهٔ A است.

ث. هیچ عضو A زیرمجموعهٔ A نیست. $\quad$ ج. $A \in A$

چ. $\{\{b,c\}\}$ زیرمجموعهٔ A است.

۵. **مجموعهٔ $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$ مفروض است. آیا هر عضو مجموعهٔ A زیرمجموعهٔ A است؟**

۶. **مجموعه‌ای بنویسید که ۳ عضو داشته باشد و هر عضو آن یک زیرمجموعهٔ آن هم باشد.**

۷. **اگر A و B دو مجموعه باشند و M مرجع باشد آیا می‌توان نتیجه گرفت:**

الف. $A \not\subset B \to A \subset B'$ اگر

ب. $P(A') = (P(A))'$

۸. **اگر $|A| = ۳$ باشد $|P(P(P(A)))|$ برابر چه عددی است؟**

(نکته: $|A| = n(A)$)

۹. **اگر به تعداد عضوهای A، ۵ عضو اضافه کنیم، آن‌گاه ۸۰ عدد زیرمجموعه به ۱۲ برابر تعداد زیرمجموعه‌هایش اضافه می‌شود A چند عضوی است؟**

۱۰. **درستی یا نادرستی گزینه‌های زیر را مشخص کنید.**

ب) $b\in A \Leftrightarrow b\in P(A)$　　　　الف) $x\in A \Leftrightarrow \{x\}\in P(A)$

ت) $b\in A \Leftrightarrow \{b\}\subset A$　　　　پ) $b\in A \Leftrightarrow \{b\}\in P(A)$

۱۱. **هر مورد سمت راست را به عبارت سمت چپ مقابل وصل کنید.**

الف. اگر $A\subset B$ باشد آن‌گاه	۱) $\{x\}\in P(A)$
ب. اگر $A\subset B$ و $A\subset B'$ آن‌گاه	۲) $P(A)\subset P(B)$
پ. اگر $A=\left\{۱,\{۱\},\{۱,۲,\sqrt{۲}\}\right\}$ آن‌گاه	۳) $A'=M$
ت. $A=\left\{t\in\mathbb{N}, t=\sqrt{x-\|x\|}, x\in\mathbb{N}\right\}$ آن‌گاه	۴) $n(A)=۱$
ث. اگر $x\in A$ آن‌گاه	۵) $\{۱\}\in P(A)$

۱۲. **یک افراز ۳ عضوی برای $\mathbb{R}$ بنویسید.**

۱۳. **افرازهای ۲ عضوی بازهٔ $[-۳,۴)$ را بنویسید، چند افراز ۲ عضوی دارد؟**

۱۴. **حکم: اگر $A\not\subseteq B$ و $B\subseteq C$ باشد، آن‌گاه $A\not\subseteq C$:**

الف. همواره غلط است.

ب. همواره درست است.

۱۵. **اگر $A=\varnothing$ باشد، آن‌گاه $P(P(P(P(A))))$ دارای چند عضو است؟**

۱۶. **چند مجموعهٔ تک‌عضوی وجود دارد، به‌طوری‌که هر عضو آن زیرمجموعهٔ آن باشد؟**

۱۷. **سه مجموعهٔ A، B و C بنویسید که احکام زیر برای آن‌ها درست باشد.**

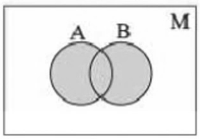
الف) $A\in B$　　$B\in C$　　$A\notin C$

ب) $A\in B$　　$A\subset B$

درس سوم: قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها - جبر مجموعه‌ها

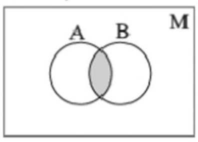
در حساب می‌توانیم دو عدد را جمع، ضرب یا تفریق کنیم. در نظریهٔ مجموعه‌ها سه عمل اجتماع، اشتراک و متمم‌گیری به‌ترتیب نظیر جمع، ضرب و تفریق در اعداد است.

اجتماع: اجتماع دو مجموعهٔ A و B که با $A\cup B$ نشان داده می‌شود مجموعهٔ تمام عضوهایی است که حداقل به یکی از دو مجموعه تعلق داشته باشد.



یعنی $x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A \vee x\in B$

اشتراک: اشتراک دو مجموعهٔ A و B که با $A\cap B$ نمایش داده می‌شود مجموعهٔ تمام عضوهایی است که هم متعلق به A هستند، هم متعلق به B.



$x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in B$

نکته: **اگر $A\cap B=\varnothing$ آن‌گاه A و B را جدا از هم گوییم.**

مثال:

اگر $A=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, ۲x+۱\leq ۴\}$ و $B=\{x \mid x\in\mathbb{N}, -۲< x+۱< ۵\}$ باشد $A\cup B$ و $A\cap B$ را بیابید.

پاسخ: $B=\{x \mid x\in\mathbb{N}, -۳< x< ۴\}$ $\quad A=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, x\leq \frac{۳}{۲}\}$

$A\cap B=\{۱\}$ $\quad A\cup B=\{\cdots,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$ $\quad B=\{۱,۲,۳\}$ $\quad A=\{\cdots,-۲,-۱,۰,۱\}$

نکته: اگر $\mathbb{N}, W, \mathbb{Z}, Q, Q'$ و $\mathbb{R}$ معرف مجموعه‌های اعداد طبیعی، حسابی، صحیح، گویا، اصم و حقیقی باشند آن‌گاه داریم:

۱) $\mathbb{N}\subset W\subset \mathbb{Z}\subset Q\subset \mathbb{R}$ $\quad$ ۲) $\mathbb{N}\cap W=\mathbb{N}$ $\quad$ ۳) $Q\cap Q'=\varnothing$ $\quad$ ۴) $Q\cup Q'=\mathbb{R}$

نکته: اگر M مرجع و A، B و C زیرمجموعه‌هایی از M باشند آن‌گاه داریم:

۱) $A\cup\varnothing=A$ $\quad$ ۳) $A\cup A=A$ $\quad$ ۵) $A\cup B=B\cup A$

۲) $A\cap M=A$ $\quad$ ۴) $A\cap A=A$ $\quad$ ۶) $A\cap B=B\cap A$

و قوانین شرکت‌پذیری:

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$
$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$

و قوانین شرکت‌پذیری:

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$
$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$

و قوانین پخش‌پذیری:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

همه روابط به راحتی قابل اثبات است و در کتاب درسی به آن‌ها اشاره شده، در این‌جا فقط به یکی از موارد اشاره می‌شود.

به‌طور مثال: ثابت کنید $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ است.

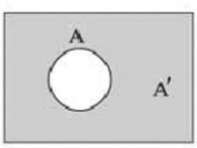
اثبات: به کمک عضوگیری و استفاده از خواص جبر مجموعه‌ها این رابطه را اثبات می‌کنیم.

$$x\in[A\cap(B\cup C)]\xleftrightarrow{\text{طبق تعریف اشتراک}}(x\in A)\wedge(x\in B\cup C)\xleftrightarrow{\text{طبق تعریف}\cup}(x\in A)\wedge[(x\in B)\vee(x\in C)]$$

$$\xleftrightarrow{\text{قانون پخش‌پذیری}}[(x\in A)\wedge(x\in B)]\vee[(x\in A)\wedge(x\in C)]\xleftrightarrow{\text{تعریف}\cap}(x\in A\cap B)\vee(x\in A\cap C)$$

$$\xleftrightarrow{\text{تعریف}\cup}x\in[(A\cap B)\cup(A\cap C)]$$

بنابراین $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ **است**



مجموعه‌های متمم، A' را متمم A گوییم هرگاه $x\in A\rightarrow x\notin A'$ یعنی هر عضوی در A باشد لزوماً در A' نیست.

نکته: $A\cup A'=M$ و $A\cap A'=\varnothing$ که در این صورت A' و A دو مجموعهٔ جدا از هم هستند.

تفاضل $A-B$، مجموعه‌ای است که شامل اعضای A باشد ولی شامل B نباشد یعنی $x\in A-B\rightarrow x\in A\wedge x\notin B$.

مثال:

۱. اگر $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{c,d,e,f\}$ باشند، مجموعه‌های $A-B$ و $A-(A\cap B)$ را بیابید.

پاسخ: $A\cap B=\{c,d\}\rightarrow A-(A\cap B)=\{a,b\}$ $\qquad$ $A-B=\{a,b\}$

۲. نشان دهید $A-B=A\cap B'$

پاسخ: به کمک عضوگیری و قواعد اجتماع و اشتراک اثبات می‌کنیم:

$$x\in A-B\xrightarrow{\text{تعریف تفاضل}}x\in A\wedge x\notin B\xrightarrow{\text{تعریف متمم}}x\in A\wedge x\in B'\xrightarrow{\text{تعریف اشتراک}}x\in(A\cap B')\quad(۱)$$

$$x\in A\cap B'\xrightarrow{\text{تعریف }\cap}x\in A\wedge x\in B'\rightarrow x\in A\wedge x\in(M-B)\rightarrow x\in A\wedge x\in M\wedge x\notin B$$

$$\rightarrow[(x\in A)\wedge(x\in M)]\wedge(x\notin B)\xrightarrow{\text{تعریف }\cap}\underbrace{(x\in A\cap M)}_{(۲)}\wedge(x\notin B)$$

$$\rightarrow(x\in A)\wedge(x\notin B)\rightarrow x\in(A-B)$$

$$(۱),(۲):A\cap B'=A-B$$

قضایای زیر در مورد مجموعه‌های متمم برقرار می‌باشد:

۱) $(A')'=A$ $\qquad$ ۲) $M'=\varnothing$ $\qquad$ ۳) $\varnothing'=M$

۴) $A\cap A'=\varnothing$ $\qquad$ ۵) $(A\cup A')=M$ $\qquad$ ۶) $A\subset B\Leftrightarrow B'\subset A'$

۷) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ قانون دمورگان $\qquad$ ۸) $(A\cap B)'=A'\cup B'$ قانون دمورگان

مثال:

اگر A، B و C سه مجموعهٔ دلخواه باشند، آیا $(A\cap B)-(A\cap C)$ با مجموعهٔ $A\cap(B-C)$ مساوی است؟

پاسخ:

$$(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)'\xrightarrow{\text{دمورگان}}(A\cap B)\cap(A'\cup C')$$

$$\xrightarrow{\text{پخش پذیری}}(A\cap B\cap A')\cup(A\cap B\cap C')\xrightarrow{\text{جابه جایی}}\underbrace{(\underbrace{A\cap A'}_{\varnothing}\cap B)}_{\varnothing}\cup(A\cap B\cap C')$$

$$\varnothing\cup A\cap(B\cap C')=A\cap(B-C)\rightarrow(A\cap B)-(A\cap C)=A\cap(B-C)$$

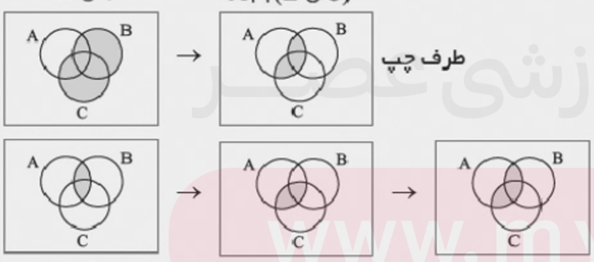
نکته: علاوه بر استفاده از روابط جبر مجموعه‌ها و روش عضوگیری گاهی اوقات تساوی‌های مهم جبری را می‌توان به فرم هندسی که همان استفاده از نمودار ون می‌باشد اثبات کرد.

مثال:

با نمودار ون نشان دهید. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

پاسخ:

$B\cup C$ $\qquad$ $A\cap(B\cup C)$ $\qquad$ طرف چپ



طرف راست

$A\cap B$ $\qquad$ $A\cap C$ $\qquad$ $(A\cap B)\cup(A\cap C)$

طرف چپ و طرف راست تساوی باهم برابر هستند.

نکته: گاهی اوقات برای اجتماع و اشتراک بازه‌ها از $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ یا $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ استفاده می‌شود. به‌طور مثال: اگر $A_i=[-i,i]$ باشد، $\bigcup\limits_{i=1}^{4} A_i$ یعنی اجتماع A_1 ، A_2 ، A_3 و A_4 که برابر است با:

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$

اثبات قضایای مهم کتاب: در این بخش اثبات روابط مهم کتاب آورده شده است.

الف) $A \cup B = B \cup A$

$x \in A \cup B \to x \in A \vee x \in B \xleftrightarrow{\text{جابه‌جایی}} x \in B \vee x \in A = B \cup A$ ✓

ب) $A \cup \underbrace{(B \cup C)}_{1} = \underbrace{(A \cup B)}_{2} \cup C$

(اثبات با نمودار ون)

$x \in A \cup (B \cup C) = x \in A \vee (x \in B \cup C) \leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$

$\leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C = (A \cup B) \cup C$

پ) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$x \in A \cup (B \cap C) \to x \in A \vee (x \in B \cap C) \to x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$

$\to (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \to (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C)$

$\to A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$

و به طریق مشابه $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$ به این ترتیب اثبات تکمیل می‌شود.

ت) $A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = B$

$A \subseteq B$

$B \subseteq B$

$(A \cup B) \subseteq (B \cup B) \to (A \cup B) \subseteq B \quad , \quad \underbrace{B \subseteq A \cup B}_{\text{بدیهی طبق تعریف اجتماع}} \to A \cup B = B$

ث) $A \subseteq B \leftrightarrow A \cap B = A$

$A \subseteq B$

$A \subseteq A$

$(A \cap A) \subseteq (A \cap B) \to A \subseteq A \cap B \quad , \quad \underbrace{A \cap B \subseteq A}_{\text{طبق تعریف اشتراک بدیهی}} \to A \cap B = A$

ج) قوانین جذب یا همپوشانی

۱) $A \cup (A \cap B) = A \to (A \cap M) \cup (A \cap B) = A \cap \underbrace{(M \cup B)}_{M} = A$

۲) $A \cap (A \cup B) = A \to (A \cup \varnothing) \cap (A \cup B) = A \cup \underbrace{(\varnothing \cap B)}_{\varnothing} = A$

چ) قوانین دمورگان

۱) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

$x \in (A \cup B)' \leftrightarrow x \notin A \cup B \leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \leftrightarrow x \in A' \wedge x \in B' \leftrightarrow x \in A' \cap B'$

۲) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

$x \in (A \cap B)' \leftrightarrow x \notin A \cap B \leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \leftrightarrow x \in A' \vee x \in B' \leftrightarrow x \in A' \cup B'$

عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعه

تعریف ضرب دکارتی: اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، $A\times B$ مجموعه‌ای است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A\times B=\left\{(x,y)\mid x\in A\wedge y\in B\right\}$$

نکته: در ضرب دکارتی خاصیت جابه‌جایی وجود ندارد. $A\times B\neq B\times A$

نکته: اگر A دارای m عضو و B دارای n عضو باشد آنگاه $A\times B$ دارای $m\times n$ عضو خواهد بود.

مثال:

اگر $A=\left\{2^{x-1}\mid x\in\mathbb{N},x\leq 2\right\}$ و $B=\left\{\frac{x+1}{2}\mid x\in\mathbb{Z},|x|\leq 1\right\}$ باشد $A\times B-B^2$ را تشکیل دهید. (B^2 یعنی $B\times B$)

پاسخ:

$$A=\{1,2\}$$

$$B=\left\{\frac{1}{2},0,1\right\}\quad A\times B=\left\{(1,\frac{1}{2})(1,0)(1,1)(2,\frac{1}{2})(2,0)(2,1)\right\}$$

$$B^2=B\times B=\left\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})(\frac{1}{2},0)(\frac{1}{2},1)(0,\frac{1}{2})(0,0)(0,1)(1,\frac{1}{2})(1,0)(1,1)\right\}$$

$$A\times B-B^2=(2,\frac{1}{2})(2,0)(2,1)$$

نکته: با توجه به اینکه اعضای $A\times B$ به صورت زوج مرتب می‌باشد می‌توان این مجموعه را روی صفحهٔ مختصات دکارتی نیز نمایش داد مثلاً برای نمایش زوج مرتب (a,b)، a مؤلفه اول روی محور x و b مؤلفهٔ دوم روی محور yها است. مانند نمایش نقاط در صفحه عمل می‌کنیم.

مثال:

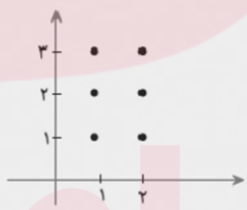
اگر $A=\left\{x\mid x\in\mathbb{N},x^2\leq 4\right\}$ و $B=\left\{x\mid x\in\mathbb{Z},x^2-5x+6=0\right\}$ باشد $(A\times B)\cup A^2$ را به کمک اعضا روی صفحهٔ محورهای مختصات نمایش دهید.

پاسخ:

$$A=\{1,2\}\quad A\times B=\{(1,2)(1,3)(2,2)(2,3)\}$$

$$B=\{2,3\}\quad A^2=A\times A=\{(1,1)(1,2)(2,1)(2,2)\}$$

$$A\times B\cup A^2=\{(1,2)(1,3)(2,2)(2,3)(1,1)(2,1)\}$$



نکته: اگر $A=\mathbb{R}$ و $B=\mathbb{R}$ باشد، $A\times B=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$ می‌شود که همان صفحهٔ محورهای مختصات است.

اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، ثابت کنید:

الف) $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$

ب) $A\times B=B\times A\rightarrow A=\varnothing\vee B=\varnothing\vee A=B$

اثبات: الف) اگر فرض کنید $A\times\varnothing\neq\varnothing$ باشد پس عضوی مانند (x,y) در $A\times\varnothing$ وجود دارد یعنی

$$(x,y)\in A\times\varnothing\xrightarrow{\text{طبق تعریف ضرب دکارتی}}x\in A\wedge\underbrace{y\in\varnothing}_{\text{تناقض: تهی عضوی ندارد}}$$

پس فرض خلف باطل است.

حال اگر فرض کنیم $\varnothing\times A\neq\varnothing$ باشد پس

$$(x,y)\in\varnothing\times A\xrightarrow{\text{طبق تعریف ضرب دکارتی}}\underbrace{x\in\varnothing}_{\text{تناقض: تهی عضوی ندارد}}\wedge y\in A$$

بنابراین فرض خلف باطل است و حکم برقرار است.

$$A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$$

اثبات: ب) اگر $A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$ باشد طبق الف حکم ثابت است.

اگر فرض کنیم $A\neq\varnothing$ و $B\neq\varnothing$ با فرض $A\times B=B\times A$ داریم:

$$A\neq\varnothing,B\neq\varnothing\Rightarrow\exists x\in A\wedge\exists y\in B\longrightarrow\exists(x,y)\in A\times B$$

$$\xrightarrow{A\times B=B\times A}(x,y)\in B\times A\rightarrow x\in B\wedge y\in A\rightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A\rightarrow A=B$$

ویژگی‌های ضرب دکارتی:

$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

$A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

نکته: نمایش هندسی $\mathbb{R}\times\{0\}$ محور xهاست.

نکته: نمایش $\mathbb{R}\times\mathbb{R}-\{0,0\}$ صفحهٔ مختصات بدون مبدأ است.

نکته: نمایش $(\mathbb{R}-\{0\})\times(\mathbb{R}-\{0\})$ صفحه بدون محور yهاست.

تمرین‌های امتحانی

۱. اگر $A=\{a,\{a,b\},\{c\}\}$ و $B=\{a,\{b,c\},\{c\}\}$ باشند $A\cap B$، $A\cup B$ و $A-B$ را بنویسید.

۲. اگر $A\cap B=\varnothing$ آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت که $A'\cap B'=\varnothing$.

۳. با استفاده از روش عضوگیری ثابت کنید:

الف) $A-B=B'-A'$

ب) $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$

۴. اگر $A_n=\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$ باشد مطلوبست:

الف) $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$

ب) $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$

۵. ثابت کنید. (به کمک قوانین جبر مجموعه‌ها)

الف) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-C$

ب) $A\cap(B-C)=B\cap(A-C)$

پ) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

ت) $A\cap(B-C)=(A-C)\cap(B-C)$

۶. در هریک از حالت‌های زیرمجموعهٔ خواسته شده را به کمک نمودار ون نمایش دهید و هاشور بزنید.

الف) $(A\cup B)-C$

ب) $(A\cap B)\cup C$

پ) $(A-B)\cap C$

۷. اگر $M=\{x\mid x\in\mathbb{N}, x\le 10\}$، $A=\{x\mid x\in M, 2<x+1\le 8\}$، $B=\{2,5,8,6\}$ و $C=\{2,3\}$ باشد درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A-B=A\cap B'$

ب) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

پ) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

۸. هریک از مجموعه‌های زیر را با یک نمودار ون نمایش دهید.

الف) $A'\cap B'$

ب) $A\cap B'$

پ) $A\subset B$

ت) $A'\cup B$

۹. اگر A و B زیرمجموعه‌های M باشند ثابت کنید:

الف) $(M-A)\cup(M-B)=M-(A\cap B)$

ب) $(M-A)\cap(M-B)=M-(A\cup B)$

۱۰. اگر A و B دو مجموعه باشند، نشان دهید A و B-A مجزا هستند و نیز $A\cup B=A\cup(B-A)$.

۱۱. با توجه به روابط مجموعه‌ها، در جاهای خالی مجموعه‌ها و یا نمادهای مناسب قرار دهید.

الف) اگر $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow A \cup B \boxed{} C \cup D$

ب) اگر $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B \boxed{} C$

پ) اگر $A \subset B \to A \cup B = \boxed{}$

ت) اگر $A - B = \varnothing \to A' \cup B = \boxed{}$

ث) اگر $A \subset B \to A - B = \boxed{}$

ج) اگر $A - B = A \to A \cap B = \boxed{}$

۱۲. طرف دوم رابطهٔ $(A-B) \cup (A-B') \cup [A \cap (A' \cup B)]$ کدام مجموعه خواهد شد؟

۱۳. متمم مجموعهٔ $([(A-B)-A] \cup [(A \cap B)-B])$ چه مجموعه‌ای خواهد بود؟

۱۴. با چه شرطی $A-(B-C)$ و $(A-B)-C$ با هم برابر هستند؟

۱) $A \cap B = \varnothing$ ۲) $A \cap C = \varnothing$ ۳) $A \subset B$ ۴) $A \subset C$

۱۵. کدام تساوی زیر نادرست است؟ برای آن‌ها مثال نقض بزنید.

الف. $A - B = A \cap B'$ ب. $A - B = B' - A'$

پ. $A - B = A - (A \cap B)$ ت. $A - B = A - (A \cup B)$

۱۶. ثابت کنید:

الف) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

ب) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

۱۷. با مثال نقض نشان دهید نتیجه‌گیری زیر نادرست است.

$$A \cap B = A \cap C \quad , \quad A - B = A - C \Rightarrow B = C$$

۱۸. به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

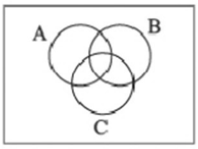
الف) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

ب) $(A - B) - C = (A - C) - B$

۱۹. طرف دوم عبارت $[A-(B-C)] \cap A \cap C$ را به‌دست آورید.

۲۰. طرف دوم $(A-B) \cup B$ را به‌دست آورید.

۲۱. در هریک از قسمت‌های زیر، بخشی را که به‌صورت توصیفی مشخص شده است، هاشور بزنید.



الف. اعضایی که فقط در A و C باشند ولی در B نباشند.

ب. اعضایی که در C باشد ولی در A و B نباشد.

پ. اعضایی که فقط در B باشد.

ت. اعضایی که در A یا B باشد ولی در C نباشد.

۲۲. در هریک از موارد زیر به جای S یکی از مجموعه‌های $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ یا $\mathbb{R}$ جایگزین کنید تا تساوی درست شود.

الف) $\{x \in S \mid x^2 = 5\} = \varnothing$ ب) $\{x \in S \mid -1 \leq x \leq 1\} = \{1\}$

پ) $\{x \in S \mid x^2 - 4 < 0\} = (-2, 2)$ ت) $\{x \in S \mid 2 < x^2 < 5\} - \{x \in S \mid x > 0\} = \{-2\}$

۲۳. اگر $A=\left\{m\in\mathbb{Z} \mid -n\le m\ ,\ 2^m\le n\right\}$ و $n\in\mathbb{N}$ باشد، تعیین کنید چه رابطه‌ای بین مجموعه‌های A_1، A_2، A_3 و A_4 وجود دارد؟ سپس $\bigcap\limits_{i=1}^{4} A_i$ و $\bigcup\limits_{i=1}^{4} A_i$ را بنویسید.

۲۴. عبارات زیر را ساده کنید.

الف) $(A-B)\bigcap(B-A)$

ب) $(A-B)\bigcup(A\bigcap B)\bigcup(B-A)$

پ) $(A-B)\bigcap B$

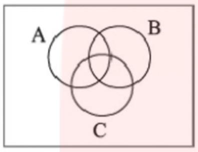
۲۵. اگر منظور از $A\Delta B$ (تفاضل متقارن) مجموعه‌ای باشد که $(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\notin A\wedge x\in B)$ این مجموعه را با نمودار ون نمایش دهید.

۲۶. اگر مجموعه‌ی $A\times A$ دارای ۱۶ عضو باشد و $(1,3)$ و $(2,4)$ دو عضو آن باشند، مجموعه A را بیابید.

۲۷. اگر $A=\{x \mid x\in\mathbb{R}, |x|<2\}$ و $B=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x^2\le 1\}$ باشد، $B\times A$ را روی محورهای مختصاتی نمایش دهید.

نمونه سؤال امتحانی فصل اوّل

ردیف	سؤالات	بارم
۱	**کدام‌یک از عبارات زیر گزاره هستند.** الف. سومین کشور مهندس‌خیز دنیا ایران است. ب. خوردن غذای خود را با نام خدا شروع کنید. پ. e و π اعدادی اول هستند.	۰/۷۵
۲	**اگر p و q دو گزاره باشند، ثابت کنید $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ (جدول ارزش‌های هر یک از گزاره‌ها را رسم کنید).**	۱
۳	**جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.** الف. به محتوای .... که دارای ارزش .... یا .... است، گزاره می‌گوییم. ب. جمله‌های ....، ....، .... گزاره محسوب نمی‌شوند. پ. هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جایگذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود .... نامیده می‌شود. ت. اگر p و q دو گزاره باشند گزاره مرکب $p \wedge q$ را .... دو گزاره و $p \vee q$ را .... دوگزاره می‌گوییم.	۲/۲۵
۴	**در هریک از گزاره‌های زیر دامنهٔ متغیر گزاره نماها داده شده است. مجموعه جواب هریک را مشخص کنید.** الف. $\{\forall x \in \mathbb{R}$ و $۲x^{۲} - ۵x + ۳ = ۰\}$ ب. یک تاس پرتاب می‌کنیم. $D = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶)$ $\quad P(\{x\}) = \frac{۵}{۶}$	۰/۵
۵	**مجموعهٔ A دارای n عضو است. اگر دو عضو متمایز به A اضافه کنیم، تعداد ۹۶ زیرمجموعه به تعداد زیرمجموعه‌های A اضافه می‌شود. n کدام است؟**	۱
۶	**اگر A مجموعهٔ اعداد دو رقمی و $B = \{۷k, k \in A\}$ آن‌گاه مجموعهٔ توانی $A \cap B$ چند عضو دارد؟**	۱/۲۵
۷	**اگر $A = \{a, b, \{a, b\}, \{a\}\}$ باشد، درستی یا نادرستی روابط زیر را مشخص کنید.** الف) $\{a\} \subseteq A$ ب) $\{a\} \in P(A)$ پ) $\{\{a\}, a\} \in A$ ت) $\{a, b\} \subseteq A$	۱
۸	**الف. اگر $A = \{a, b, \{a, b\}\}$ مجموعه $P(P(A))$ چند عضو دارد؟** **ب. اگر $A = \{x^{۲} - y^{۲}, ۴\}$ و $B = \{۸, x + y\}$ باشد و $A = B$ مقدار x و y را بیابید.**	۱
۹	**اگر $A_n = [n - ۱, n + ۱]$ آن‌گاه مجموعهٔ $\bigcup_{i=۱}^{۴} A_n - \bigcap_{i=۱}^{۴} A_n$ برابر چه مجموعه‌ای خواهد شد؟**	۱
۱۰	طرف دوم عبارات زیر را پس از ساده کردن بنویسید. الف) $(B - C) \cap [(A \cup B) \cap (C - A)']$ ب) $(A - B)' \cap (A \cup B) \cap A'$	۲

ردیف	سؤالات	بارم
۱۱	درستی تساوی‌های زیر را با کمک جبر مجموعه‌ها بررسی کنید. الف) $(A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B)=A\cup B$ ب) $\left[(B'-A)\cup(A'-B)\right]'=A\cup B$	۲
۱۲	اگر $A'\subset B$ باشد، حاصل $\left[\left((B'-A)-(A-B)\right)\cup B'\right]'$ برابر کدام مجموعه است؟	۱/۲۵
۱۳	مجموعهٔ $\left((A\cup C)-B\right)'$ را در شکل مقابل هاشور بزنید.  	۱
۱۴	اگر $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{R}, -2\le\frac{x}{2}-1<2\right\}$ و $B=\left\{x \mid x\in\mathbb{R}, \lvert x+1\rvert\le 3\right\}$ مجموعه‌های $A\cup B$ و $A-B$ را به‌دست آورید و $A\times B$ را روی محورهای مختصاتی نمایش دهید.	۳
۱۵	ثابت کنید اگر $(A-B)-C=A$ آن‌گاه $A\cap B=\varnothing$ و $A\cap C=\varnothing$.	۱
	جمع نمره	۲۰

پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل اول

۱. اگر $A=\{x,\{x,z\}\}$ آن‌گاه مجموعهٔ $P(A)$ دارای چند عضو است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۲. کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $\{x\mid x\in A, x=x\}=A$ ۲) $\{x: x\in A, x\notin A\}=\varnothing$

۳) $\{x\mid x\in A\vee x\notin A\}=M$ ۴) هر سه گزینه

۳. فرض کنید $A=\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\},\cdots,\{1,2,3,\cdots\}\}$ آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

۱) $\{\mathbb{N}\}\in A$ ۲) $\mathbb{N}\in A$ ۳) $\mathbb{N}\in P(A)$ ۴) $\mathbb{N}\subset A$

۴. فرض کنید $A=\varnothing$ و $B=P(P(P(A)))$ آن‌گاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر غلط است؟

۱) هر عضو B زیرمجموعه‌ای از B است. ۲) $\{\varnothing\}\in B$

۳) $\{\{\varnothing\}\}\subset B$ ۴) $\{\{\{\varnothing\}\}\}\in B$

۵. مجموعهٔ $A=\{5h+4: h\in Z\}$ با کدام‌یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

۱) $\{5h-1, h\in\mathbb{Z}\}$ ۲) $\{5h+1, h\in\mathbb{Z}\}$ ۳) $\{1 ،h+1, h\in\mathbb{Z}\}$ ۴) $\{1 ،h-1, h\subset\mathbb{Z}\}$

۶. اگر $x\in A$ باشد آن‌گاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $\{x\}\in P(A)$ ۲) $\{\{x\}\}\in P(A)$ ۳) $\{\{\{x\}\}\}\in P(P(A))$ ۴) هر سه گزینه

۷. عبارت $(A-B)\cup(A\cap C)$ برابر کدام‌یک است؟

۱) $(A-B)-C$ ۲) $(A-C)-B$ ۳) $A-(B-C)$ ۴) $A-(C-B)$

۸. طرف دوم عبارت $[A-(B-C)]\cap A\cap C=?$ کدام مجموعه است؟

۱) $A\cap B$ ۲) $B\cap C$ ۳) $C\cap A$ ۴) $\varnothing$

۹. طرف دوم عبارت $(A\cap B)\cup(A'\cap B)\cup(A\cap B')\cup(A'\cap B')=?$ کدام است؟

۱) A ۲) B ۳) $\varnothing$ ۴) M

۱۰. کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $A\subset B'\Leftrightarrow A\not\subset B$ ۲) $A-B=\varnothing\Leftrightarrow A=B$

۳) $A\subset B\Leftrightarrow (B-A)\cup A=B$ ۴) هرسه گزینه

۱۱. فرض کنید $E=A-(B-C)$ و $F=(A-B)-C$ کدام نتیجه‌گیری همواره درست است؟

۱) $E=F$ ۲) $E\subset F$ ۳) $F\subset E$ ۴) $F\cap E=\varnothing$

۱۲. با چه شرطی $A-(B-C)$ و $(A-B)-C$ با هم برابرند؟

۱) $A\cap B=\varnothing$ ۲) $A\cap C=\varnothing$ ۳) $A\subset B$ ۴) $A\subset C$

۱۳. طرف دوم عبارت $[(A-B)-(C-B)]\cup(A-C)=?$ برابر کدام است؟

۱) $A-B$ ۲) $A-C$ ۳) $B-A$ ۴) $C-B$

۱۴. اگر $A=(-5,3]$ و $B=(-2,4]$ آنگاه مساحت نمودار $A\times B$ برابر کدام گزینه است؟

۱) ۶۳ ۲) ۶۸ ۳) ۴۸ ۴) ۴۲

۱۵. اگر $A=\{a,b,c,d,e\}$ و $B=\{a,b,c,x,y,z\}$ آنگاه مجموعه $(A\times B)\cup(B\times A)$ چند عضو دارد؟

۱) ۲۱ ۲) ۳۱ ۳) ۴۱ ۴) ۵۱