دایره:

مکان هندسی نقاطی است از یک صفحه که از یک نقطه ثابت از همان صفحه به یک فاصله باشد.این نقطه را مرکز دایره و آن فاصله را شعاع دایره گویند.

دایره به مرکز O و شعاع R را با نماد $C(O,R)$ نشان می دهند.

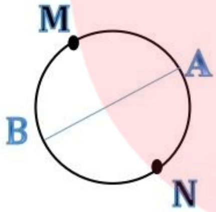
وتر دایره:

هر پاره خطی که دو نقطه از یک دایره را به هم وصل می کند وتر دایره نامیده می شود .

کمان دایره:

هر وتر دایره را به دو قسمت تقسیم می کند که هر قسمت یک کمان از دایره می باشد.

وتر AB و دو کمان $\widehat{AMB}$ و $\widehat{ANB}$



نکته:وتری که از مرکز دایره می گذرد، قطر نامیده می شود.

اوضاع نسبی خط و دایره

۱)خط بر دایره مماس است:خط با دایره یک نقطه مشترک دارند.

۲)خط قاطع با دایره:خط با دایره دو نقطه مشترک دارد.

۳)خط غیر قاطع با دایره: خط با دایره نقطه مشترک ندارد.

قضیه: یک خط و یک دایره بر هم مماس اند اگر و تنها اگر این خط در نقطهٔ تماس با دایره بر شعاع آن نقطه عمود باشد.

شعاع دایره

پاره خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه ای روی دایره باشد.

زاویه مرکزی:

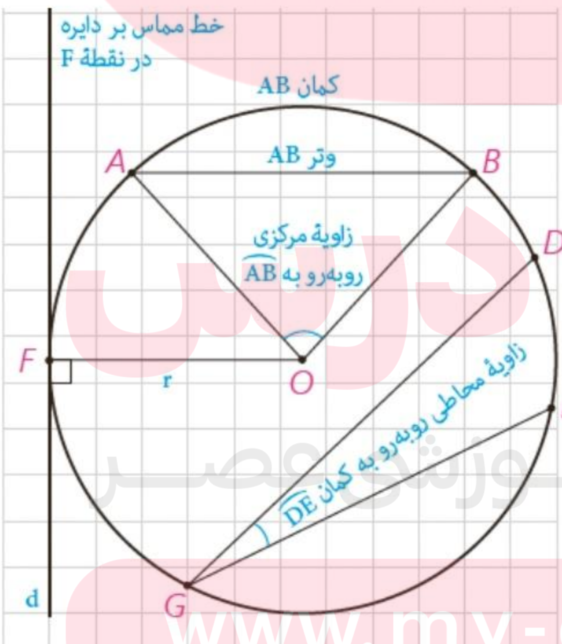
زاویه ای که راس آن روی مرکز دایره و اضلاع آن شعاع دایره می باشد، زاویه مرکزی نامیده می شود که اندازه آن برابر کمان نظیرش می باشد.

زاویه محاطی:

زاویه ای که راس آن روی محیط دایره و اضلاع آن وتر دایره می باشد، زاویه محاطی نامیده می شود که اندازه آن برابر نصف کمان نظیرش می باشد.

زاویه ظلی:

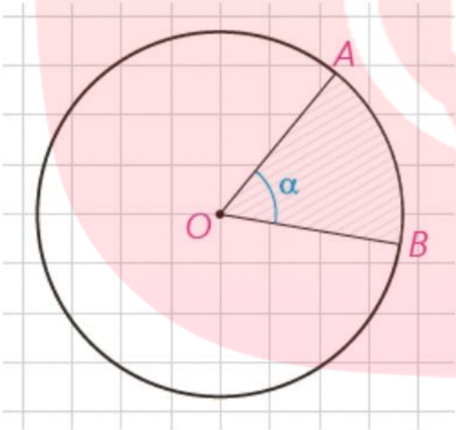
زاویه ای که راس آن روی محیط دایره و یک ضلع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر آن وتر دایره می باشد،زاویه ظلی نامیده می شود که اندازه آن نصف کمان نظیرش می باشد.



قطاع دایره:

ناحیه ای از درون و روی دایره را، که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است یک قطاع دایره می نامند.

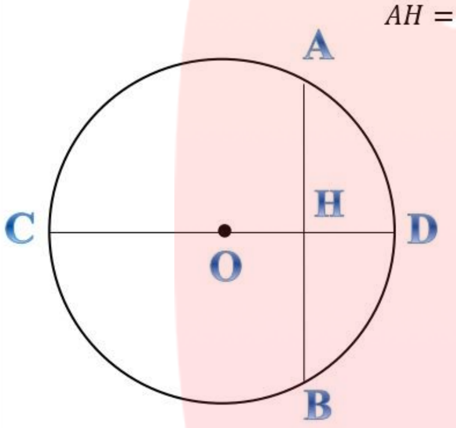
نکته: اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C(O,R)$ بر حسب درجه مساوی α باشد، طول کمان AB برابر است با $L = \frac{\pi R}{۱۸۰}\alpha$ و مساحت قطاع برابر است با $S = \frac{\pi R^۲\alpha}{۳۶۰}$ و اگر α بر حسب رادیان باشد، طول کمان و مساحت قطاع به ترتیب برابر است با $L = R\alpha$ و $S = \frac{۱}{۲}R^۲\alpha$.



قضایای دایره

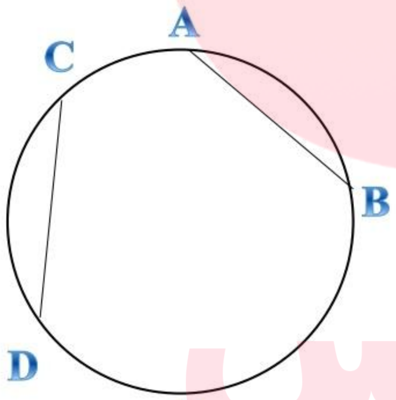
قضیه ۱:در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، وتر و کمان روبه روی آن را نصف می کند.

فرض) $MN \perp AB$ حکم) $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ و $AH = BH$



نکته: عکس قضیه بالا نیز بر قرار می باشد.

قضیه ۲: در هر دایره،اگر دو تر مساوی باشند،کمان های نظیر آن ها نیز مساویند.

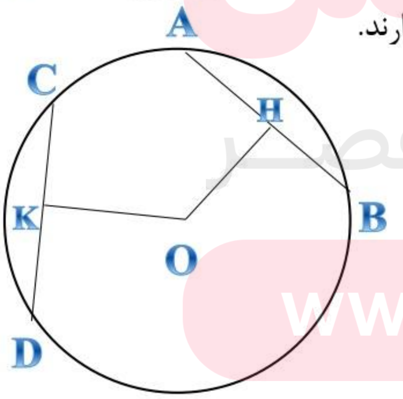


فرض)$AB = CD$

حکم)$\widehat{AB} = \widehat{CD}$

نکته: عکس قضیه بالا نیز بر قرار می باشد.

قضیه ۳: اگر دو وتر مساوی باشند، به یک فاصله از مرکز قرار دارند.

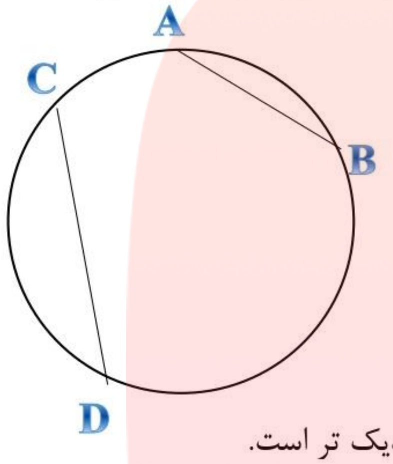


فرض)$\widehat{AB} = \widehat{CD}$

حکم)$OH = OK$

نکته: عکس قضیه بالا نیز بر قرار می باشد.

قضیه ۴:در هر دایره اگر دو وتر نابرابر باشند،کمان های نظیر آن ها نابرابرند و کمان نظیر وتر بزرگ تر، بزرگ تر از کمان نظیر وتر کوچک تر است.

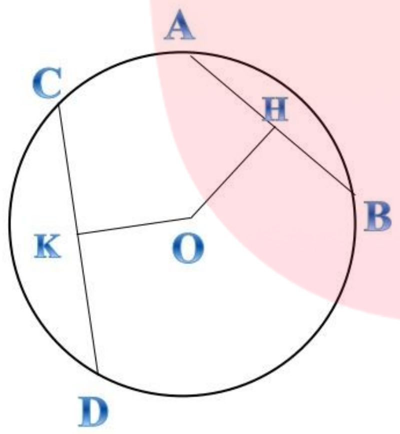


فرض) $AB < CD$

حکم) $\widehat{AB} < \widehat{CD}$

نکته: عکس قضیه بالا نیز بر قرار می باشد.

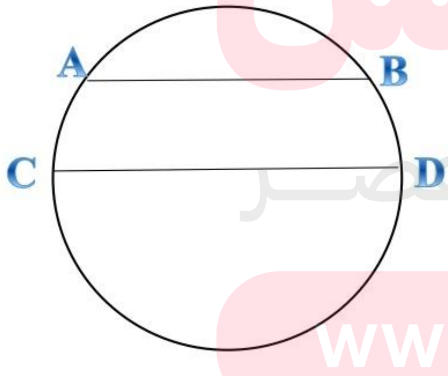
قضیه ۵:اگر دو وتر نابرابر باشند، وتر بزرگ تر به مرکز دایره نزدیک تر است.



فرض) $AB < CD$

حکم) $OH > OK$

قضیه۶: در هر دایره، کمان های بین دو وتر موازی با هم برابراند.

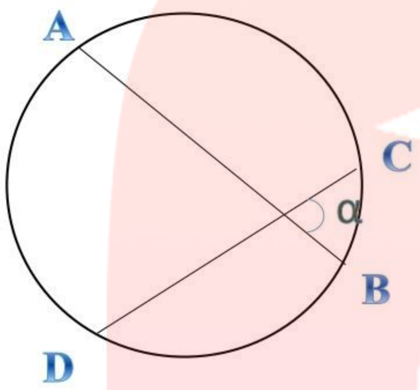


فرض) $AB \parallel CD$

حکم) $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

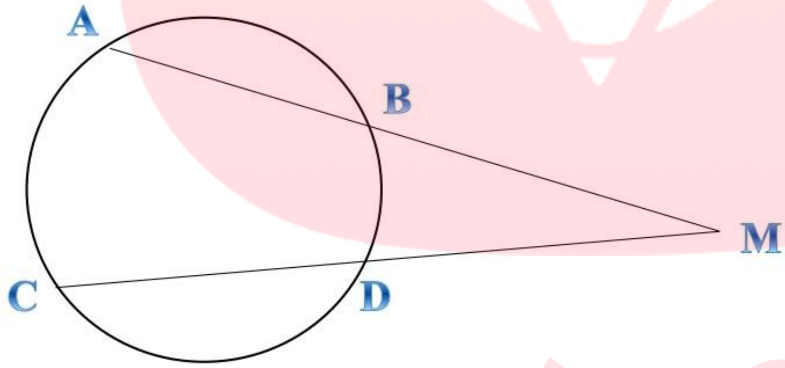
نکته: عکس قضیه بالا نیز بر قرار می باشد

نکته: زاویه بین دو وتر متقاطع در دایره برابر است با:



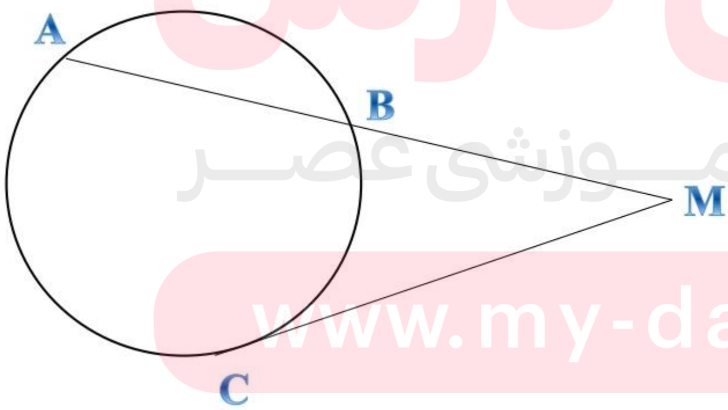
$$\hat{\alpha} = \frac{\widehat{AD}+\widehat{CB}}{۲}$$

نکته۲:اگر M محل تقاطع امتداد دو وتر AB و CD باشد، اندازه زاویه M برابر است با:



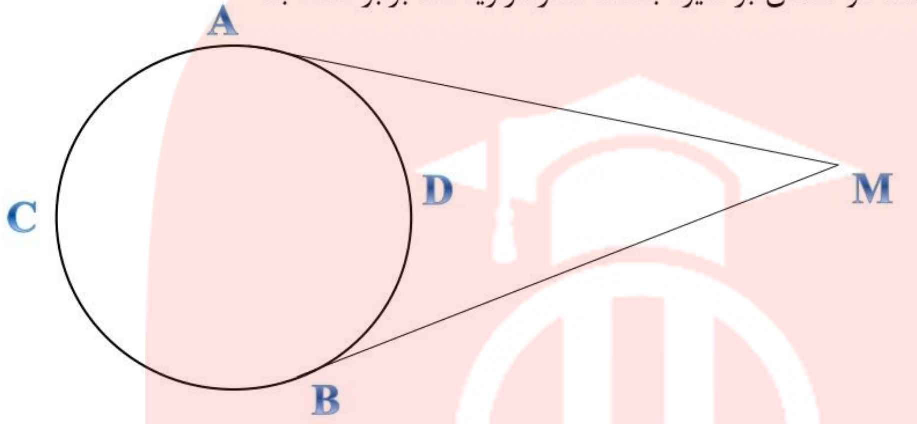
$$\hat{M} = \frac{\widehat{AC}-\widehat{BD}}{۲}$$

نکته۳:اگر AB وتری از دایره و CM مماسی بر دایره باشد،اندازه زاویه M عبارت است از:



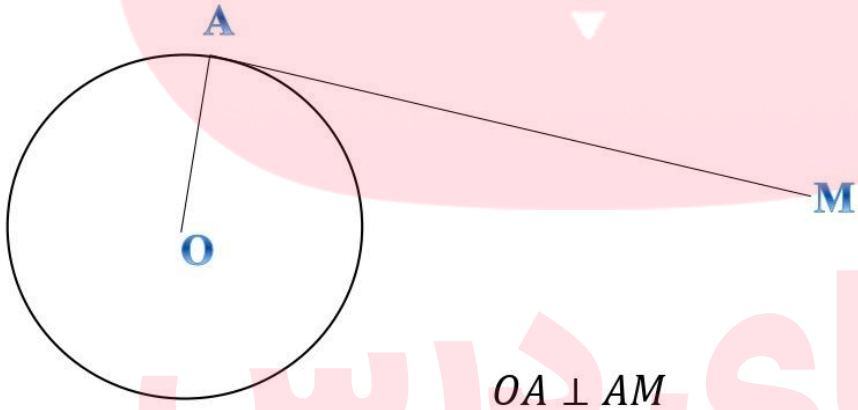
$$\hat{M} = \frac{\widehat{AC}-\widehat{BC}}{۲}$$

نکته۴:اگر AM و BM دو مماس بر دایره باشند اندازه زاویه M برابر است با:



$$\hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{۲}$$

نکته۵: شعاع دایره بر خط مماس بر دایره در محل تماس عمود است.

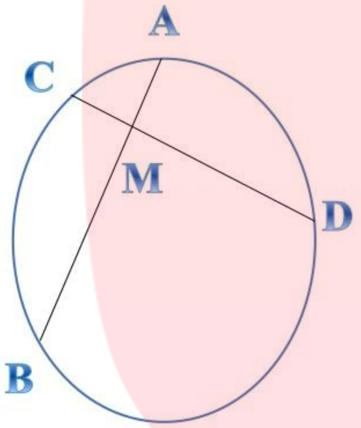


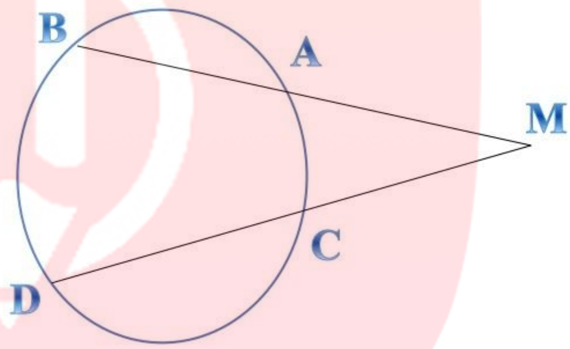
$$OA \perp AM$$

روابط طولی در دایره

قضیه: هر گاه خط های شامل دو وتر دلخواه AB وCD در نقطه ای مانند M (درون یا برون دایره)یکدیگر را قطع کنند. آنگاه رابطه زیر برقرار است.

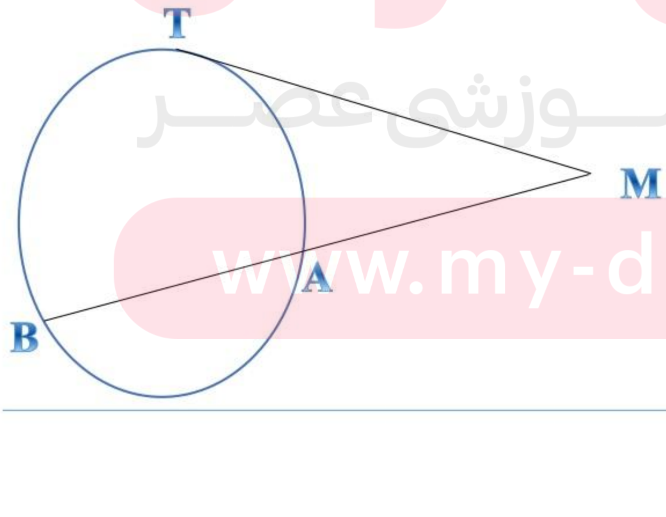
$$MA.MB = MC.MD$$





نکته: عکس قضیه بالا هم برقرار است یعنی اگر دو پاره خط AB وCD همدیگر را (درون یا برون دایره) در نقطه M قطع کنند و رابطه $MA.MB = MC.MD$ بینشان برقرار باشد آنگاه چهار نقطه A وB وC وD روی یک دایره واقع اند.

قضیه: هر گاه M نقطه ای بیرون دایره باشد و از آن مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم .مربع اندازه قطعه مماس رسم شده برابر است با حاصل ضرب اندازه های دو قطعه قاطع.

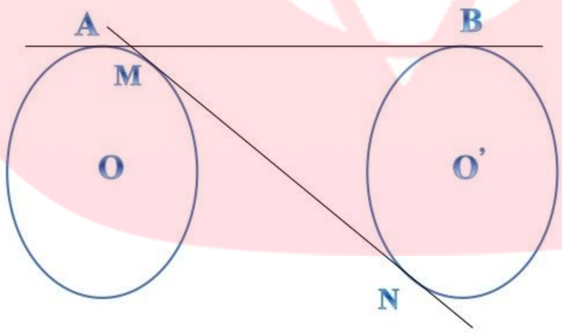


$$MT^{2} = MA.MB$$

نکته: عکس قضیه بالا نیز برقرار است.

نکته مهم: از هر نقطه بیرون دایره تنها دو مماس بر دایره می توان رسم کرد و طول این دو مماس با هم برابر است.

تعریف: هر خط یا پاره خطی که بر دو دایره مماس باشد، مماس مشترک دو دایره می نامند. اگر دو دایره در یک طرف این خط باشند به آن مماس مشترک خارجی و اگر دو دایره در طرفین این خط باشند به آن مماس مشترک داخلی دو دایره می گویند

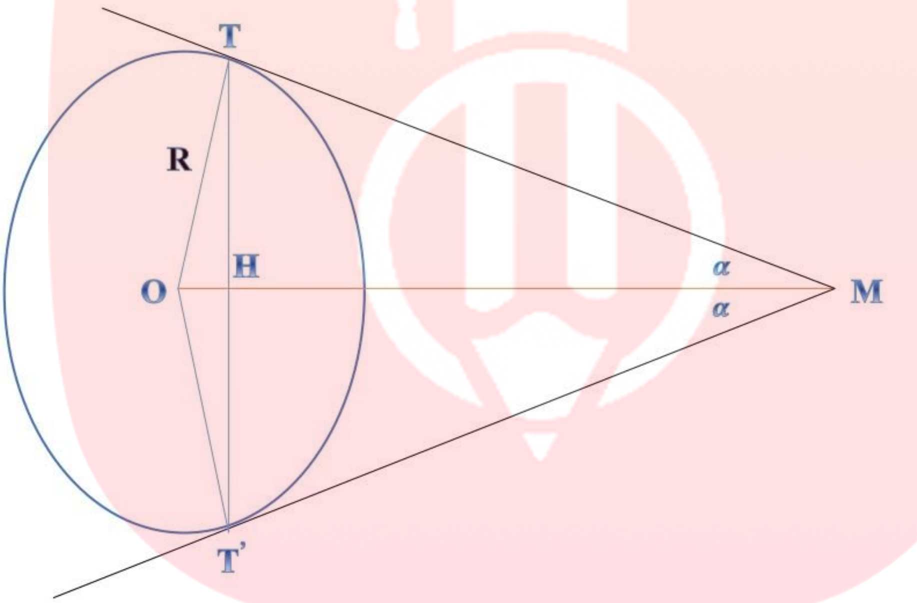


AB مماس مشترک خارجی

MN مماس مشترک داخلی

چند رابطه طولی مهم

اگر MT و ’MT دو مماس بر دایره ای به شعاع R و OT و ́OT شعاع های دایره باشند داریم:



$$MT = MT' = \sqrt{OM^{۲} - R^{۲}}$$

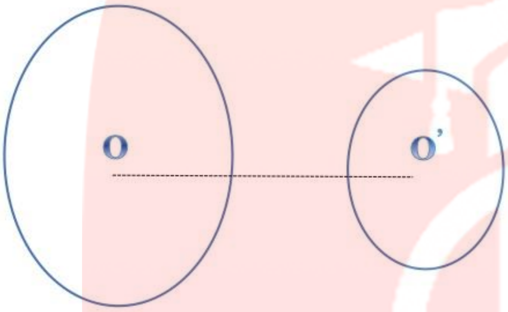
$$R^{۲} = OH.OM$$

OM عمود منصف ́TTاست.

OM نیمساز زاویه ’TMT است.

وضعیت دو دایره نسبت به هم

۱) متخارج

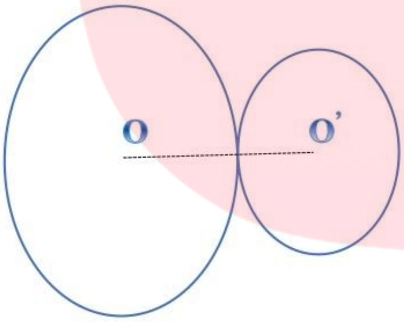


$d > R + R'$

دو مماس مشترک خارجی.

دو مماس مشترک داخلی.

۲) مماس برون



$d = R + R'$

دو مماس مشترک خارجی

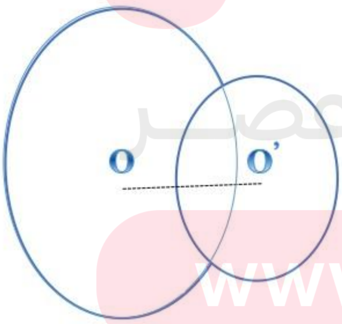
یک مماس مشترک داخلی.

۳)متقاطع

$R - R' < d < R + R'$

دو مماس مشترک خارجی.

دو دایره مماس مشترک داخلی ندارند.

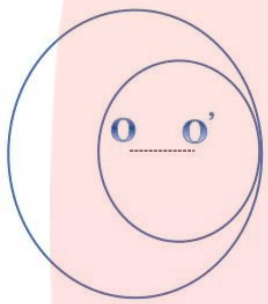


۴)مماس درون

$d = R - R'$

یک مماس مشترک خارجی.

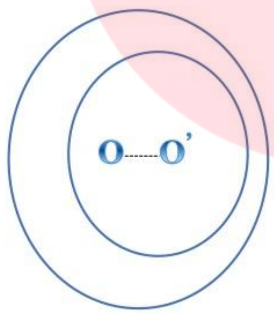
دو دایره مماس مشترک داخلی ندارند.



۵)متداخل

$d < R - R'$

دو دایره هیچ مماس مشترکی ندارند.



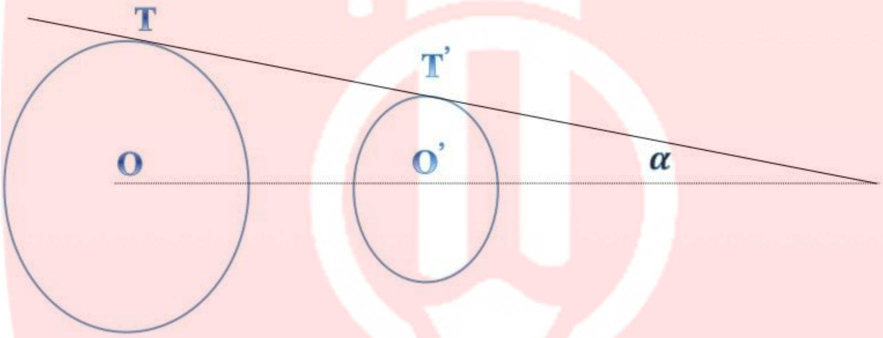
۶) هم مرکز

$d = ۰$

دو دایره هیچ مماس مشترکی ندارند.

نکته۱: طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع های R_1 و R_2 و خط المرکزین d برابر است با:

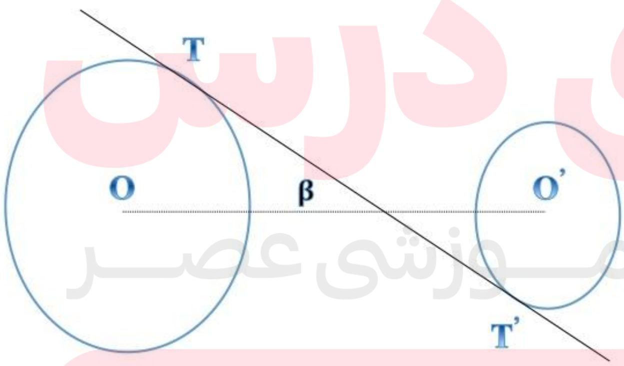
$$TT' = \sqrt{d^2 - (R_1 - R_2)^2}$$



$$\sin\alpha = \frac{R_1 - R_2}{d}$$

نکته۲: طول مماس مشترک داخلی دو دایره به شعاع های R_1 و R_2 و خط المرکزین d برابر است با:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R_1 + R_2)^2}$$



$$\sin\beta = \frac{R_1 + R_2}{d}$$

نکته۳: در دو دایره متخارج، همواره طول مماس مشترک داخلی کوچک تر از طول مماس مشترک خارجی می باشد.

نکته۴: اگر دو دایره به شعاع های R_1 و R_2 مماس برون باشند، طول مماس مشترک خارجی برابر است با:

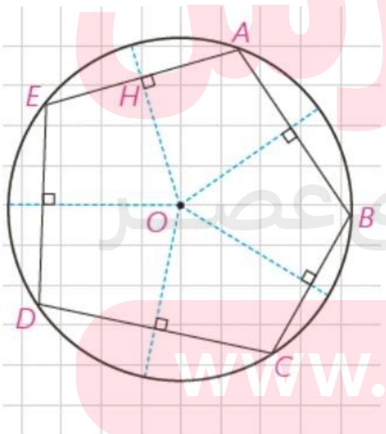
$$2\sqrt{R_1 R_2}$$

چند ضلعی های محاطی و محیطی

چند ضلعی محاطی

اگر همه راس های یک چند ضلعی بر روی یک دایره قرار بگیرند ، آن چند ضلعی را محاطی گویند.

قضیه: یک چند ضلعی، محاطی است اگر و فقط اگر عمود منصف های همه ضلع های آن در یک نقطه هم رأس باشند.



قضیه بالا را به دو صورت می توان بیان کرد

۱. عمود منصف های اضلاع چند ضلعی محاطی همرس اند و برعکس
۲. در چند ضلعی های محاطی،مرکز دایره های محیطی نقطه همرسی عمود منصف ها است.

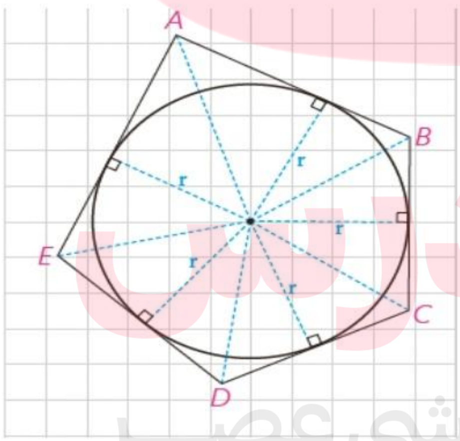
نکته ۱: همه مثلث ها ، مربع ها و مستطیل ها محاطی هستند.

نکته ۲:متوازی الاضلاع در صورتی محاطی میشود که مستطیل باشد.

نکته ۳:ذوزنقه ای محاطی است که متساوی الساقین باشد.

چند ضلعی محیطی

چند ضلعی را محیطی می گوییم اگر و فقط اگر دایره ای باشد که بر همه ضلع های آن مماس باشد؛ در این صورت دایره را دایرهٔ محاطی این چند ضلعی می نامیم.



قضیه:

یک چند ضلعی، محیطی است اگر و فقط اگر همه نیمسازهای زاویه های آن در یک نقطه همرس باشند.این نقطه مرکز دایره محاطی چند ضلعی است.

قضیه بالا به صورت دوشرطی است یعنی:

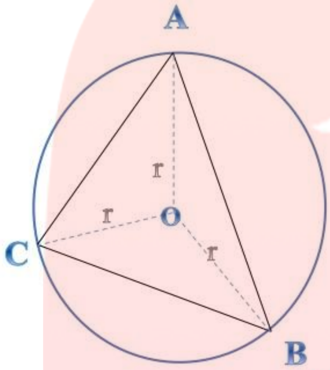
۱)اگر یک چند ضلعی محیطی باشد، نیمسازهای زاویه های آن در یک نقطه همرس اند.

۲)اگر نیمسازهای زاویه های یک چند ضلعی در یک نقطه همرس باشند،آن چند ضلعی محیطی می باشد.

نکته: شعاع دایره محاطی یک n ضلعی به محیط ۲P و مساحت S برابر است با:

$$r = \frac{S}{P}$$

دایره محیطی مثلث



نکته۱:مرکز دایره محیطی مثلث، محل برخورد عمود منصف اضلاع می باشد.

نکته۲:چون در مثلث قائم الزاویه محل همرسی عمودمنصف اضلاع وسط وتر می باشد بنابراین مرکز دایره محیطی مثلث قائم الزاویه وسط وتر است و شعاع آن برابر نصف وتر می باشد.

نکته۳ :شعاع دایره محیطی مثلثی به اضلاع a و b و c و مساحت S برابر است با

$$\frac{abc}{۴S}$$

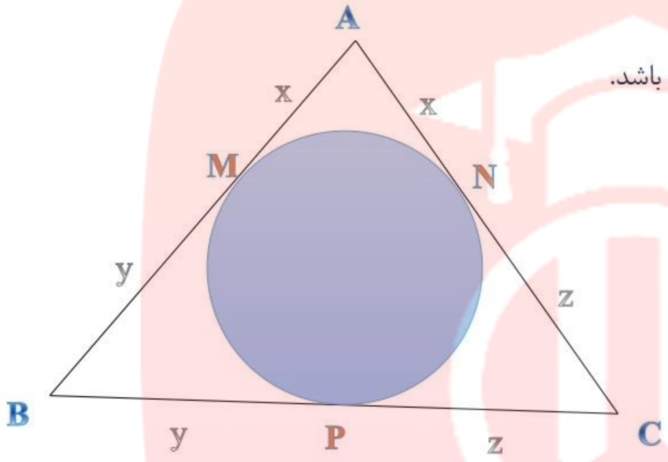
نکته۴: شعاع دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع a برابر است با

$$\frac{a\sqrt{۳}}{۳}$$

دایره محاطی داخلی مثلث

ABC مثلثی دلخواه است

N،M و P محل تماس دایره با اضلاع مثلث می باشد.



اگر داشته باشیم:

AC=b وBC=a و AB=c و

۲P برابر محیط مثلث باشد، یعنی $p=\frac{a+b+c}{۲}$

آنگاه

$$x = p - a$$

$$y = p - b$$

$$z = p - c$$

نکته۱:مرکز دایره محاطی داخلی مثلث، محل برخورد نیمسازهای زوایای داخلی مثلث است.

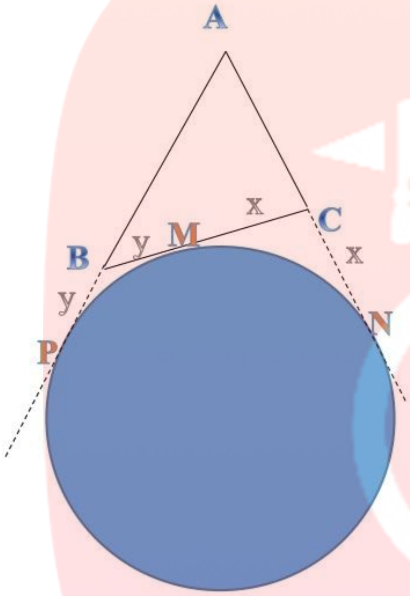
نکته۲:شعاع دایره محاطی داخلی مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر است با:

$$r=\frac{a\sqrt{۳}}{۶}$$

نکته۳: شعاع دایره محاطی داخلی مثلث قائم الزاویه به وتر a و محیط ۲P برابر است با:

$$r = p - a$$

دایره محاطی خارجی مثلث



ABC مثلثی دلخواه است.

M و N و P محل تماس دایره با اضلاع مثلث یا امتداد آن ها هستند.

اگر داشته باشیم:

AC=b وBC=a و AB=c و

۲P برابر محیط مثلث باشد، یعنی $p = \frac{a+b+c}{۲}$

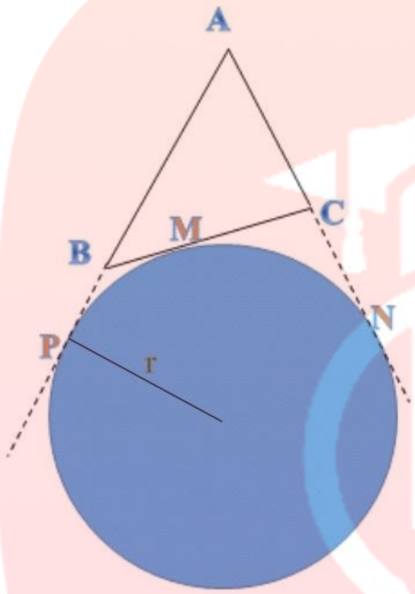
آنگاه

$$x = p - b$$
$$y = p - c$$

نکته۱: مرکز دایره محاطی خارجی مثلث، محل برخورد دو نیمساز زاویه خارجی با نیمساز زاویه داخلی راس سوم می باشد.

نکته۲: هر مثلث دارای سه دایره محاطی خارجی می باشد.

نکته۳: اندازه شعاع دایره محاطی خارجی مثلثی به محیط ۲P و مساحت S و مماس بر ضلعی به طول a برابر است با: $r_a = \frac{S}{P-a}$



به همین ترتیب برای دو دایره محاطی خارجی دیگر داریم:

$$r_b = \frac{S}{P-b} \qquad , \qquad r_c = \frac{S}{P-c}$$

نکته ۴: اگر r شعاع دایره محاطی داخلی و r_a و r_b و r_c شعاع سه دایره محاطی خارجی یک مثلث باشند آنگاه داریم:

$$\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{۱}{r}$$

نکته۵: شعاع دایره محاطی خارجی مثلث متساوی الاضلاع برابر ارتفاع مثلث است.

نکته۶: در صفحه هر مثلث چهار نقطه وجود دارد که از اضلاع مثلث یا امتداد آن ها به یک فاصله هستند .این چهار نقطه مراکز دایر ه های محاطی هستند.