

فصل سوم

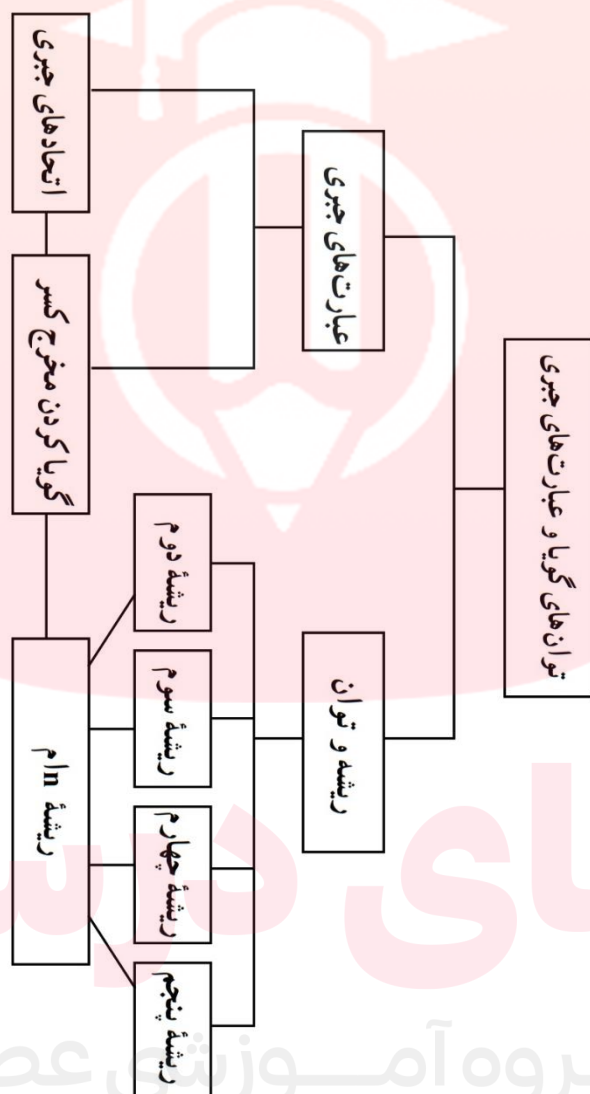
توان گویا و عبارت جبری

درس اول : ریشه n ام و توان گویا

درس دوم : عبارت های جبری

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir



درس اول : ریشه n ام و توان گویا

ریشه n ام عدد a : عددی مانند x که اگر به توان n برسد ، حاصل a شود ($x^n = a$) را ریشه n ام عدد a می نامند .
با این تعریف می توان نتیجه گرفت مثلاً :

ریشه سوم 27 برابر 3 و ریشه پنجم -32 برابر -2 است .

ریشه چهارم 16 چیست ؟ ریشه دوم 25 چطور ؟ ریشه دوم -4 - چطور ؟

نتیجه :

۱. اعداد مثبت مرتبه زوج دارند .

۲. اعداد منفی ریشه مرتبه زوج

ریشه سوم عدد 5 را بنویسید :

ریشه های دوم عدد 5 را بنویسید :

نتیجه :

رادیكال با فرجه زوج ، فقط ریشه یک عدد را نشان می دهد .

سوال : حاصل عبارت های زیر را بنویسید .

الف) ریشه ششم 64 (ب) ریشه سوم -64 (ج) ریشه چهارم -81 (د) ریشه سوم $1/000$

مای دارس
گروه آموزشی عصر

سوال : حاصل عبارت های زیر را بدست آورید .

ج) $\sqrt[3]{256} =$

ب) $\sqrt[4]{0.0016} =$

الف) $\sqrt[3]{\frac{-64}{125}} =$

ح) $\sqrt[3]{-1} =$

ه) $\sqrt[5]{-0.00032} =$

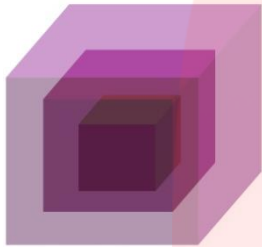
د) $\sqrt[3]{243} =$

www.my-dars.ir

یافتن حدود رادیکال $\sqrt[n]{a}$: دو عدد صحیح متوالی مانند c, b را می یابیم که $b^n < a < c^n$ در این صورت $b < \sqrt[n]{a} < c$

سوال : در جاهای خالی دو عدد صحیح متوالی قرار دهید .

لف) $\square < \sqrt{7} < \square$ ب) $\square < \sqrt{10} < \square$ ج) $\square < \sqrt[3]{20} < \square$ د) $\square < \sqrt[3]{650} < \square$



سوال : حجم مکعب بیرونی ۶۴ و حجم مکعب بیرونی ۲۷ است . طول ضلع مکعب

میانی چه عددی می تواند باشد ؟

مقایسه مقدار رادیکال a با فرجه های مختلف :

الف) اگر $a > 1$: آنگاه با افزایش فرجه، مقدار رادیکال کوچک تر می شود :

$$2 > \sqrt{2} > \sqrt[3]{2} > \sqrt[4]{2} > \dots$$

ب) اگر $a > 1$: آنگاه با افزایش فرجه، مقدار رادیکال بزرگ تر می شود :

$$0.2 < \sqrt{0.2} < \sqrt[3]{0.2} < \sqrt[4]{0.2} < \dots$$

ج) اگر $a < -1$: آنگاه با افزایش فرجه (فقط فرجه فرد) مقدار رادیکال بزرگ تر می شود :

$$-2 < \sqrt[3]{-2} < \sqrt[5]{-2} < \dots$$

د) اگر $a < -1$: آنگاه با افزایش فرجه (فقط فرجه فرد) مقدار رادیکال کوچک تر می شود :

$$-0.2 > \sqrt[3]{-0.2} > \sqrt[5]{-0.2} > \dots$$

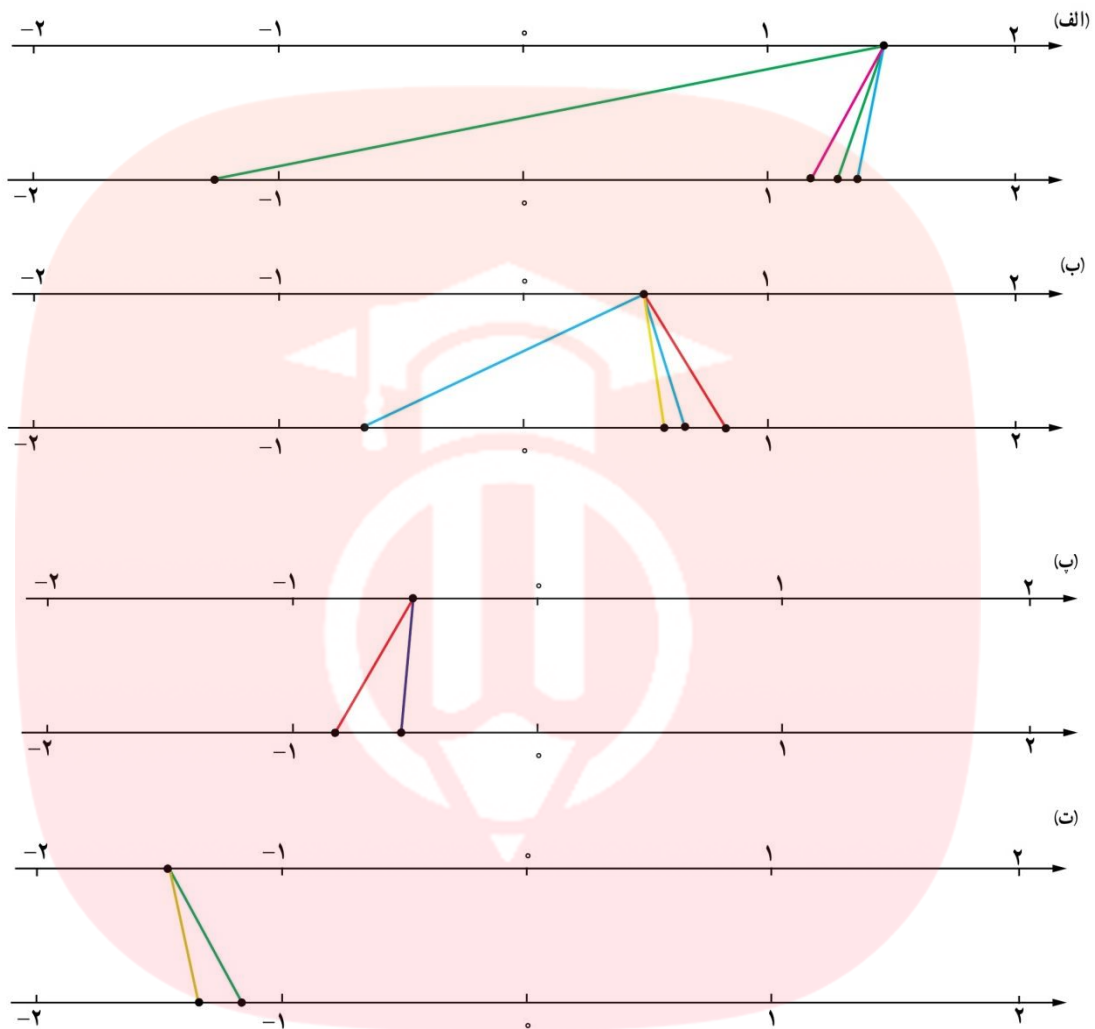
گروه آموزشی عصر

سوال : علامت $<$ یا $>$ را قرار دهید .

الف) $\sqrt[3]{8} \square \sqrt[4]{8}$ ب) $\sqrt[3]{-0.2} \square \sqrt[4]{-0.2}$ ج) $\sqrt{0.25} \square \sqrt[3]{8}$ د) $\sqrt{-9} \square \sqrt[3]{-9}$

www.my-dars.ir

سوال : ریشه سوم و چهارم و پنجم عدد a را در محور زیر با r_3, r_4, r_5 نمایش دهید .



قواعد رادیکال ها :

- (۱) برای n فرد همواره $\sqrt[n]{a^n} = a$ است .
- (۲) برای n زوج همواره $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ است .
- (۳) برای n فرد همواره $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ است .
- (۴) برای n زوج فقط با شرط $a \geq 0$; $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ است .

(۵ و ۴) اگر رادیکال ها تعریف شده باشد :

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad \sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

(۶ و ۷) اگر رادیکال ها تعریف شده باشد :

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$$

سوال : عبارات زیر را به ساده ترین صورت بنویسید .

$$\sqrt[4]{(-2)^4} =$$

$$\sqrt[4]{-2^4} =$$

$$\sqrt[3]{5^{-3}} =$$

$$(\sqrt[3]{2})^3 =$$

$$\sqrt[4]{16^5} =$$

$$\sqrt[5]{\left(\frac{-1}{32}\right)^2} =$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{8} =$$

$$\sqrt[3]{125 \times 64} =$$

$$\sqrt{9x^2} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$\sqrt[5]{\frac{32}{243}} =$$

$$\sqrt{1 + \frac{9}{16}} =$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} =$$

$$\sqrt{2\sqrt{2}} =$$

$$\sqrt[3]{2^6} =$$

$$\sqrt[3]{(-3)^{12}} =$$

$$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} =$$

توان گویا :

مسئله : اگر یک گرم از باکتری در آزمایشگاه داشته باشیم که در هر یک ساعت وزن آن دو برابر شود ، بعد از سه ساعت و نیم وزن آن چقدر خواهد بود ؟

رابطه توان گویای یک عدد مثبت با رادیکال :

اگر a عدد مثبتی باشد داریم : $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ و توجه شود که ما برای اعداد منفی توان گویا تعریف نمی کنیم زیرا به مشکلاتی مانند مثال زیر بر می خوریم :

اگر تعریف کنیم $(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1}$ و $(-1)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-1)^2}$ چون $(-1)^{\frac{2}{3}} = (-1)^{\frac{1}{3} \times 2} = (-1)^{\frac{1}{3}}^2 = (\sqrt[3]{-1})^2 = (-1)^2 = 1$ پس $(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1}$ در نتیجه : یعنی $-1 = 1$

سوال : عبارات های زیر را به شکل رادیکال ساده شده بنویسید .

$$81^{\frac{1}{4}} =$$

$$5^{\frac{2}{5}} =$$

$$(16^{\frac{1}{3}})^{\frac{2}{4}} =$$

$$\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{4}{3}} =$$

www.my-dars.ir

سوال : به شکل رادیکال با توان گویای ساده شده بنویسید .

$$\sqrt[5]{64} =$$

$$\sqrt[4]{3^2} =$$

$$\sqrt[5]{(0.01)^3} =$$

$$\frac{64}{\sqrt[5]{16}} =$$

درس دوم : عبارت های جبری

اتحاد : یک تساوی از عبارت های جبری که به ازای هر عددی برقرار باشد را اتحاد می گویند .

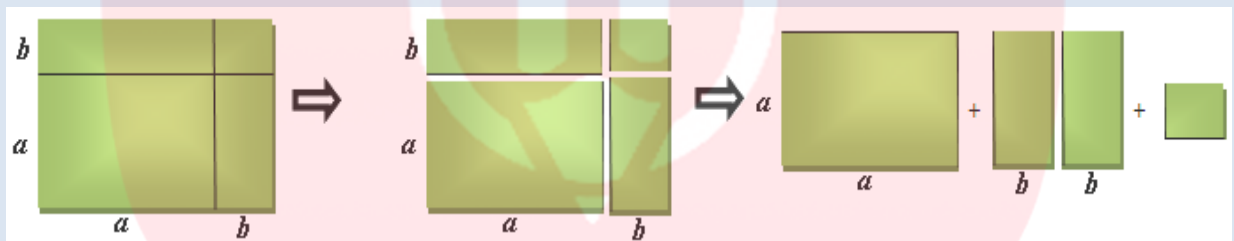
(توجه : معادله یک تساوی از عبارت های جبری است که به ازای مقادیر خاصی برقرار است که آن مقادیر جواب معادله هستند)

$$\begin{cases} (a+b)^p = a^p + pab + b^p \\ (a-b)^p = a^p - pab + b^p \end{cases}$$

اتحاد مربع دو جمله ای :

بیان فارسی : اولی به توان دو ، دو برابر اولی در دومی ، دومی به توان دو .

بیان هندسی :



مثال :

الف) $(2x+1)^2 = (2x)^2 + 2 \times (2x) \times 1 + (1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

ب) $(3a-2)^2 = (3a)^2 + 2 \times (3a) \times (-2) + (2)^2 = 9a^2 - 12a + 4$

سوال : با استفاده از اتحاد ها ، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف) $(2x+1)^2 =$

ب) $(x + \frac{1}{x})^2 =$

ج) $(2-3x)^2 =$

www.my-dars.ir

د) $(x + \sqrt{3})^p =$

ه) $(y + x^3)^p =$

سوال : جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید .

الف) $(2a - \dots)^p = \dots - \dots + \frac{1}{4}$

ب) $(\dots + \sqrt{5})^p = 9x^p + \dots + \dots$

سوال : حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحاد بیابید .

الف) $99^p =$

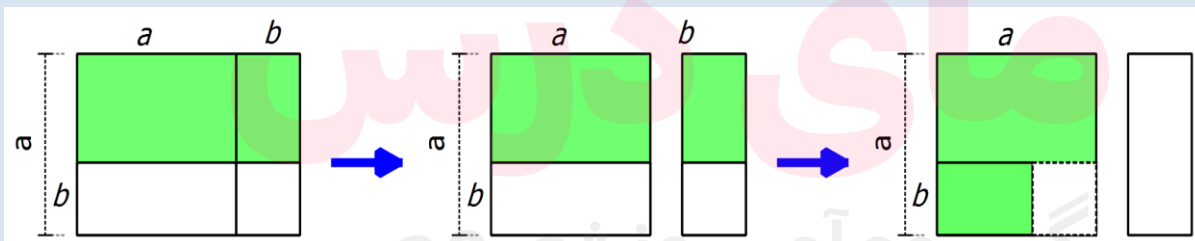
ب) $10^p =$

$$(a-b)(a+b) = a^p - b^p$$

اتحاد مزدوج :

بیان فارسی : اولی به توان دو ، منهای ، دومی به توان دو .

بیان هندسی :



مثال : با استفاده از اتحاد ها ، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف) $(x-4)(x+4) = (x)^p - (4)^p = x^p - 16$

ب) $(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3}) = (a)^p - (\sqrt{3})^p = a^p - 3$

سوال : با استفاده از اتحاد ها ، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف) $(p - 4x)(p + 4x) =$

ب) $(x^p + \frac{1}{p})(x^p - \frac{1}{p}) =$

ج) $(\sqrt{3}x + 1)(\sqrt{3}x - 1) =$

د) $(px^p + y^3)(px^p - y^3) =$

سوال : حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحاد بیابید .

الف) $99 \times 101 =$

ب) $1005 \times 995 =$

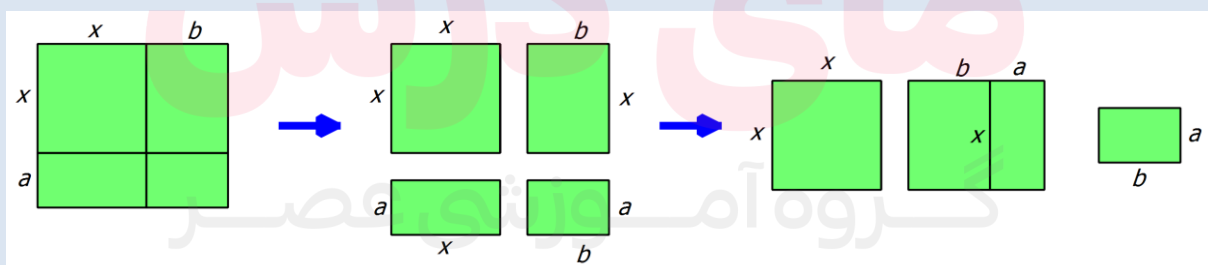
ج) $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) =$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

اتحاد جمله مشترک :

بیان فارسی : مشترک به توان دو ، مجموع غیر مشترک در مشترک ، ضرب غیر مشترک .

بیان هندسی :



مثال : با استفاده از اتحاد ها ، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف) $(x - 1)(x + 4) = (x)^2 + (-1 + 4)(x) + (-1)(4) = x^2 + 3x - 4$

ب) $(2a + 3)(2a + 5) = (2a)^2 + (3 + 5)(2a) + (3)(5) = 4a^2 + 16a + 15$

سوال : با استفاده از اتحاد ها ، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف) $(3 + 2x)(3 + 5x) =$

ب) $(x^p + \frac{3}{5})(x^p - \frac{p}{5}) =$

ج) $(px + \frac{1}{p})(px - \frac{p}{3}) =$

د) $(p - 3x)(p - x) =$

سوال : حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحاد بیابید .

الف) $98 \times 101 =$

ب) $102 \times 103 =$

$$\begin{cases} (a-b)(a^p+ab+b^p)=a^p-b^p \\ (a+b)(a^p-ab+b^p)=a^p+b^p \end{cases}$$

اتحاد چاق و لاغر :

بیان فارسی :اولی به توان سه ، دومی به توان سه.

قرینه
 $(\Delta - O)(\Delta^p + \Delta O + O^p)$

توجه مهم : قسمت چاق این اتحاد از روی قسمت لاغر ساخته شده :

گروه آموزشی عصر

مثال : با استفاده از اتحاد ها ، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف) $(px-1)(14x^p+px+1)=(px)^p+(-1)^p=14x^p-1$

ب) $(a+3b)(a^p-3ab+b^p)=(a)^p+(3b)^p=a^p+27b^p$

www.my-dars.ir

سوال : با استفاده از اتحاد ها ، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف $(y^p + x^p)(y^p - x^p + y^p + x^p) =$

ب $(x - \frac{1}{x})(x^p + \frac{1}{x^p} + 1) =$

ج $(9 + 4x)(9 - 4x + 4x^p) =$

د $(\sqrt[p]{x} - 1)(\sqrt[p]{x^p} - \sqrt[p]{x} + 1) =$

سوال : جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید .

الف $(x^p - \dots + \dots)(\dots + 1) = x^p + \dots$

ب $(px + \frac{1}{p})(\dots - \dots + \dots) = \dots + \frac{1}{\lambda}$

ج $(px - \dots)(\dots + \dots + \dots) = \dots - \dots$

$$\begin{cases} (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{cases}$$

اتحاد مکعب دو جمله ای :

بیان فارسی : اولی به توان سه ، سه برابر مربع اولی در دومی ، سه برابر اولی در مربع دومی ، دومی به توان سه .

مثال : با استفاده از اتحاد ها ، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف $(9a + 1)^3 = (9a)^3 + 3(9a)^2(1) + 3(9a)(1)^2 + (1)^3 = 8a^3 + 12a^2 + 4a + 1$

ب $(x - p)^3 = (x)^3 + 3(x)^2(-p) + 3(x)(-p)^2 + (-p)^3 = x^3 - 4x^2 + 12x - 8$

سوال : با استفاده از اتحاد ها ، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف) $(p - 4x)^3 =$

ب) $(x + \frac{1}{3})^3 =$

ج) $(x^p + p)^3 =$

سوال : جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید .

الف) $(\dots + 1)^3 = 8x^3 + \dots + \dots + \dots$

ب) $(\dots - \dots)^3 = 64 - \dots + \dots - x^3$

سوال : حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحاد بیابید .

الف) $99^3 =$

ب) $52^3 =$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab + 3ac + 3bc$$

اتحاد مربع سه جمله ای :

بیان فارسی : مربع اولی و دومی و سومی ، دو برابر اولی و دومی ، دو برابر اولی و سومی ، دو برابر دومی و سومی .

مثال : با استفاده از اتحاد ها ، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف) $(p + x + 3y)^3 = (p)^3 + (x)^3 + (3y)^3 + 3(p)(x) + 3(p)(3y) + 3(x)(3y) = 4 + x^3 + 9y^3 + 4x + 12y + 6xy$

ب) $(a - 3 - b)^3 = (a)^3 + (-3)^3 + (-b)^3 + 3(a)(-3) + 3(a)(-b) + 3(-3)(-b) = a^3 + 9 + b^3 - 6a - 3ab + 6b$

www.my-dars.ir

سوال : با استفاده از اتحاد ها ، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف) $(1 - 2x + x^2)^3 =$

$$\text{ب) } (x - y - \frac{1}{p})^p =$$

سوال : حاصل 123^3 را به کمک اتحاد مربع سه جمله ای بیابید .

تجزیه : تبدیل یک عبارت جبری به حاصل ضرب عبارت های ساده تر .

روش های تجزیه کردن به صورت های زیر هستند که ممکن است برای تجزیه یک عبارت چند روش ترکیب شوند .

روش اول (فاکتور گیری)

در صورتی که همه عبارات دارای عدد یا حروف مشترکی باشند ، آن عدد و حروف مشترک با کمترین توان را به عنوان فاکتور مشترک نوشته و جلوی آن پرانتزی باز می کنیم و تک تک عبارات را بر فاکتور مشترک تقسیم کرده و به ترتیب درون پرانتز می نویسیم .

$$3a^3b + 12ab^3 + 4a^3b^3 = 3ab(a + 4b + 2ab)$$

$$2x^7 + x^5 = x^5(2x^2 + 1)$$

روش دوم (به کمک اتحاد)

الف) در صورتی که دو جمله ای داشته باشیم که جملات مربع باشند و بین جملات منفی باشد ، از اتحاد مزدوج برای تجزیه استفاده می شود .

$$4x^2 - 1 = (2x - 1)(2x + 1)$$

$$x^2 - 9y^2 = (x - 3y)(x + 3y)$$

ب) در صورتی که دو جمله ای داشته باشیم که جملات مکعب باشند از اتحاد چاق و لاغر برای تجزیه استفاده می شود .

$$8x^3 + 1 = (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$$

$$x^3 - 27y^3 = (x - 3y)(x^2 + 3xy + 9y^2)$$

ج) در صورتی که سه جمله ای درجه دوم داشته باشیم از اتحاد جمله مشترک برای تجزیه استفاده می کنیم .

حالت اول : ضریب جمله درجه دوم ، مربع کامل باشد.

$$\begin{array}{ccccccc} x^p & + & 5x & + & 6 & = & (x+3)(x+2) \\ (x)^p & & p+3 & & p \times 3 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 16x^p & + & 8x & - & 15 & = & (4x+5)(4x-3) \\ (4x)^p & & p & & (4x) \times -3 & & 5-3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 4x^p & - & 12x & - & 9 & = & (2x-3)(2x-3) = (2x-3)^p \\ (2x)^p & & -6 & & (2x) \times -3 & & -3-3 \end{array}$$

حالت دوم : ضریب جمله درجه دوم مربع کامل نباشد (یا با روش قبلی تجزیه نشود)

$$\begin{array}{ccccccc} 2x^p & + & 5x & + & 6 & = & (x+1)(2x+3) \\ p & & p+3 & & p \times 3 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 4x^p & + & 7x & - & 15 & = & (x+2)(4x-3) \\ 4 & & 8-1 & & -15 & & 4 \times -3 \end{array}$$

روش سوم (دسته بندی)

ممکن است برای تجزیه یک عبارت لازم باشد ابتدا جملات مناسب را در کنار هم قرار دهیم تا بتوانیم به کمک ترکیب روش های قبلی آن عبارت را تجزیه کنیم .

$$\underline{a^3} - \underline{pab} + \underline{a^p b} - \underline{pb^p} = a^p(a+b) - pb(a+b) = (a+b)(a^p - pb)$$

www.my-dars.ir

سوال : عبارات زیر را تا حد ممکن تجزیه کنید .

$$pa^5b + 4a^p b^3 + 8a^3 b^3 =$$

$$x^8 + x^5 =$$

$$x^3 + 5x^2 + 4x =$$

$$x^2 - 4 =$$

$$4x^5 - x^3 =$$

$$x^4 - 1 =$$

$$4x^8 - 25x^6 =$$

$$x^6 - 81 =$$

$$2x^3 - 54 =$$

$$x^6 + 8 =$$

$$27x^5 + 8x^3 =$$

$$x^3 + 7x + 10 =$$

$$4x^3 + 12x + 9 =$$

$$x^3 - x - 20 =$$

$$9x^3 - 30x + 25 =$$

$$x^4 + 2x^2 + 1 =$$

$$2x^3 - x - 4 =$$

$$3x^4 + 4x^2 + 1 =$$

مای درسی

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

سوال : اگر $a^2 + b^2 = 17$ ، $a + b = 5$ ، آنگاه مقدار ab را بیابید .

سوال : کسر های زیر را ساده کنید .

$$\frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} =$$

$$\frac{x^2 + 1}{x^4 - 1} =$$

$$\frac{y^5 - y}{y^3 + y^2 + y} =$$

$$\frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 5x - 6} =$$

$$\frac{x^2 - 1}{(x - 1)^2} =$$

نکته : عبارتی مانند $\sqrt{2}(a+b)$ مضرب $a+b$ محسوب نمی شود زیرا ضرب عددی باید صحیح باشد . و همچنین $a+b$ شمارنده (مقسوم علیه) عبارت $\sqrt{2}(a+b)$ محسوب نمی شود .

سوال: عبارت $27a^3 - 1$ مضرب کدام یک از عبارت های زیر است ؟

الف) $a - 1$ ب) $3a - 1$ ج) $3a + 1$ د) $9a^2 + 3a + 1$

سوال : دو عبارت بنویسید که $a - b$ شمارنده آنها باشد .

www.my-dars.ir

گویا کردن مخرج کسر : تلاش برای از بین بردن عبارت های رادیکالی در مخرج کسر است که به سه حالت اتفاق می افتد

الف) مخرج با یک جمله رادیکالی : که کافیت صورت و مخرج در عبارتی ضرب شود تا توان عبرت زیر رادیکال با فرجه رادیکال برابر شود :

مثال :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow \frac{1 \times \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$$

ب) مخرج شامل چند جمله است : کافیت سعی کنیم با ضرب عبارت مناسب در صورت و مخرج ، در مخرج یک اتحاد مزدوج یا چاق و لاغر ایجاد کنیم .

مثال :

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} \Rightarrow \frac{1 \times (\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$$

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}} \Rightarrow \frac{1 \times (1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(1+\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})} = \frac{1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1+x}$$

سوال : عبارت های زیر را گویا کنید .

$$\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} =$$

$$\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} =$$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir