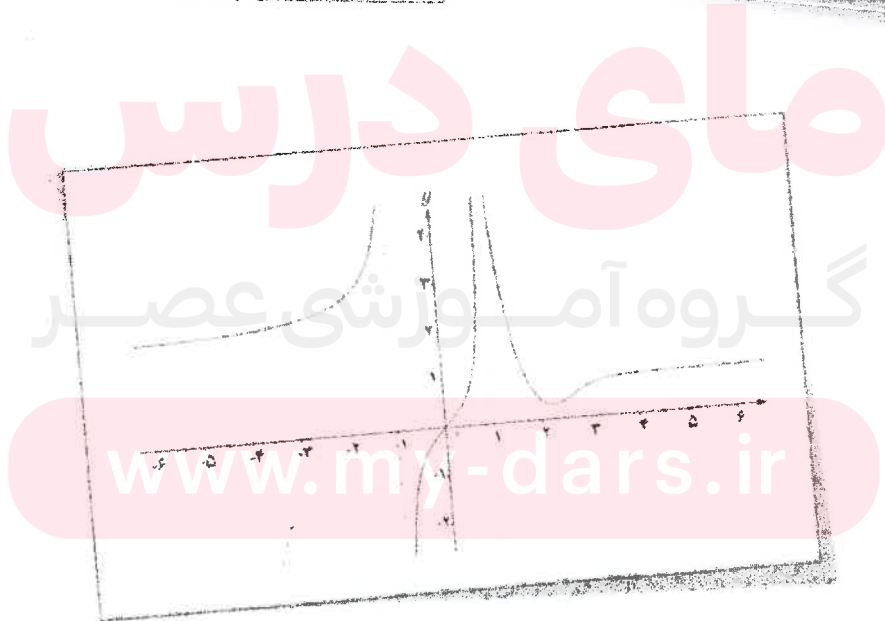
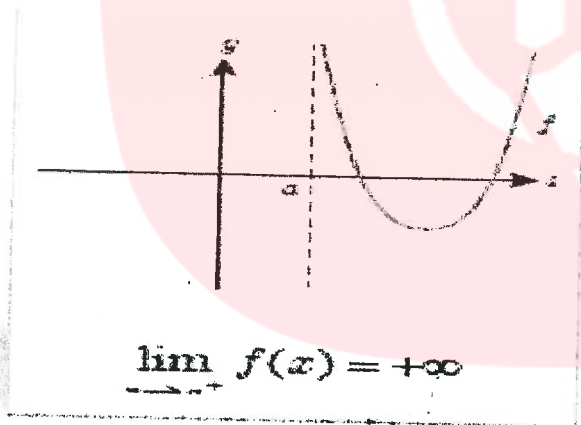


# • فصل سوم

## حد بی نهایت و حد در بی نهایت



- ۱) بخش پذیرین چندجمله‌ای  $(x-a)$  ..... ۱۴۵
- ۲) حدتابع لگاری (زنج اتمام  $\pm$ ) ..... ۱۵۱
- ۳) حد نامتناهی (حد بی‌نهایت) ..... ۱۴۳
- ۴) حد در بی‌نهایت ..... ۱۷۳

مای درس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

صفحه ۵۱ و ۵۲ کتاب درسی

بخش ندرین چند جمله‌ای ما به  $(x-a)$ :

$$\begin{array}{r} x^2 - 5x + 1 \mid x - 3 \\ \underline{x^2 - 4x} \phantom{+ 1} \\ x + 1 \\ \underline{x - 3} \\ 4 \end{array}$$

تقسیم علیه / تقسیم  
خارج قسمت  
باقی مانده

$$\begin{array}{r} f(x) \mid x - a \\ \phantom{f(x)} \mid Q(x) \\ \hline R \end{array}$$

در تقسیم، راجع بیت پارامترها بالا به صورت زیر است

$$f(x) = (x-a)Q(x) + R$$

if  $R=0 \rightarrow f(x) = (x-a)Q(x)$

$f(x)$  برابر حاصل ضرب عامل ما

تعیین: هر یک از تقسیم‌های زیر را حل کنید و راجع تقسیم را با این هر دو نام بنویسید.

$$3x^2 - 5x - 2 \mid x - 3$$

$$2x^3 + x^2 + 1 \mid x + 1$$

$$-x^3 + 5x - 2 \mid x + 1$$

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

نکته ۱: در تقسیم چند جمله‌ای  $f(x)$  بر درجه‌ای  $(x - a)$  همیشه باقی مانده برابر  $f(a)$  است.

مثلاً در تقسیم  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$  بر  $(x - 4)$ ، باقی مانده برابر  $f(4)$  است  $\leftarrow f(4) = 18$

و همچنین در تقسیم  $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$  بر  $(x + 1)$ ، باقی مانده برابر  $g(-1)$  است  $\leftarrow g(-1) = -2$

نکته ۲: در تقسیم چند جمله‌ای  $f(x)$  بر درجه‌ای  $(x - a)$  اگر  $f(a) = 0$  باشد  $\leftarrow f(x)$  بر  $(x - a)$  بخش پذیر است.

مثلاً در تقسیم  $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$  بر  $(x - 3)$  داریم  $f(3) = 0$   $\leftarrow f(x)$  بر  $(x - 3)$  بخش پذیر است.

و در تقسیم  $g(x) = -x^2 - 4x + 1$  بر  $(x + 2)$  داریم  $g(-2) = -7$   $\leftarrow g(x)$  بر  $(x + 2)$  بخش پذیر نیست.

تمرین ۱: باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای‌های زیر را بر عبارت داده شده پیدا کنید.

الف:  $f(x) = x^3 - 4x^2 - x - 1$  بر  $(x - 1)$

ب:  $g(x) = -x^3 - x^2 - x + 1$  بر  $(x + 1)$

تمرین ۲: آیا عبارت  $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 3$  بر  $(x - 2)$  بخش پذیر است؟ چرا؟

تمرین ۳: مقدار  $m$  را طوری پیدا کنید که عبارت  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + m$  بر  $x + 2$  بخش پذیر باشد.

تمرین ۴: چند جمله‌ای  $f(x) = 2x^2 - 4x - k$  بر  $x - 2$  بخش پذیر است. مطلوب است:

باقی مانده تقسیم  $f(x)$  بر  $x + 2$  را پیدا کنید.

تمرین ۵: نشان دهید چند جمله‌ای  $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 10$  بر درجه‌های  $x+2$  بخش پذیر است؟

(کار در کلاس ۳ صفحه ۵۵)

تمرین ۴: چند جمله‌ای  $f(x) = 2x^2 - x - 3$  مفروض است، اگر  $f(-1) = 0$  باشد چند جمله‌ای  $f(x)$  را

۳ صورت حاصل ضرب عوامل ماست بنویسید.

نکته ۳: برای تجزیه عبارت طری پیچیده ابتدا باید یک از ریشه‌های آن را پیدا کنیم ( $f(\alpha) = 0$ ) و سپس عبارت را

بر  $(x - \alpha)$  تقسیم کنیم تا تجزیه شود. برای پیدا کردن ریشه‌ها عدد  $0, 1, 2, 3, \dots$  را امتحان می‌کنیم.

تمرین ۱: عبارت زیر را تجزیه کنید و ۳ صورت حاصل ضرب عوامل ماست بنویسید.

$$f(x) = 2x^3 + 4x^2 + x - 8$$

تمرین ۲: چند جمله‌ای  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$  چند جمله‌ای را در ؟

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

نکته ۴: اگر  $\alpha$  ریشه چندجمله‌ای  $f(x)$  باشد  $\leftarrow f(\alpha) = 0$  به  $(x-\alpha)$  بخش پذیر است،  $f(\alpha) = 0$  حاصل می‌گیریم:

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های چندجمله‌ای  $f(x)$  باشند  $\leftarrow f(x)$  به  $(x-\alpha)(x-\beta)$  بخش پذیر است و

مثلاً وقتی  $\alpha$  ریشه چندجمله‌ای  $f(x) = 3x^3 - \alpha x^2 - 2b$  به  $(x-3)(x+1)$  بخش پذیر است یعنی این که

$$f(3) = 0, f(-1) = 0 \text{ هستند و } f(x) \text{ ریشه‌های } x = 3, x = -1$$

تربیت ۱: اگر  $f(x) = ax^3 - x^2 - b$  به  $(x-2)(x-1)$  بخش پذیر باشد حاصل  $\alpha + b$  کدام است؟

$$\frac{4}{\sqrt{5}} \quad (1)$$

$$\frac{-2}{\sqrt{5}} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (3)$$

$$\frac{-1}{\sqrt{5}} \quad (4)$$

تربیت ۲: اگر چندجمله‌ای  $f(x)$  به  $x^2 - 4$  بخش پذیر باشد حاصل  $f(2) + f(-2)$  کدام است؟

$$1 \quad (1)$$

$$1 \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$-2 \quad (4)$$

تربیت ۳: چندجمله‌ای  $f(x)$  به  $x^2 - x - 2$  بخش پذیر است. اگر  $g(x) = f(x-4) + 2f(x-1)$  باشد

باقی مانده تقسیم  $g(x)$  به  $x-3$  کدام است؟

$$1 \quad (1)$$

$$-2 \quad (2)$$

$$-4 \quad (3)$$

$$2 \quad (4)$$

تمرین ۴: فرض کنید چند جمله‌ای  $P(x)$  به  $x^2 - 1$  بخش پذیر است و  $Q(x) = P(x-1) + P(1-x)$  ،  
 آنگاه باقی مانده تقسیم  $Q(x)$  بر  $x-2$  کدام است؟  
 (سازمان تعزیرات ۹۹)

۱) -1

۲) صفر

۳) 1

۴) 2

تمرین ۵: عبارت  $x^4 + 5ax^3 + 2bx + 1$  بر  $x^2 - 4$  بخش پذیر است.  $a+b$  کدام است؟  
 (سازمان رانندگی ۸۹)

۱)  $-\frac{15}{8}$

۲)  $-\frac{17}{14}$

۳)  $\frac{17}{14}$

۴)  $\frac{15}{8}$

تمرین ۶:  $\alpha$  از این مقادیر از  $\alpha$  چند جمله‌ای  $f(x) = x^4 + \alpha x^3 - 8x^2 + x + 2$  بخش پذیر است  
 کوچکترین ریشه معادله  $f(x) = 0$  کدام است؟  
 (سازمان رانندگی ۹۴)

۱)  $1 - \sqrt{3}$

۲)  $1 - \sqrt{5}$

۳)  $-1 - \sqrt{3}$

۴)  $-1 - \sqrt{5}$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

## سوالات امتحان نهایی

① درستی یا نادرستی عبارت مای زیر را مشخص کنید.

۹۹ سی

الف: در تقسیم چندجمله‌ای  $P(x)$  بر  $x - c$ ، باقی مانده برابر  $P(c)$  است.

۹۸ سی

ب: چندجمله‌ای  $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 10$  بر درجه‌ای  $x + 2$  بخش پذیر است.

② جاسی خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

خرداد ۹۹ خارج

الف: باقی مانده تقسیم  $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$  بر  $x - 3$  برابر با ..... است.

# مای درس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)



صفحه ۵۵ تا ۵۳ کتاب درسی

۲) عدد تابع لگاری (رفع اجماع):

اگر عدد تابع  $f$  در نقطه  $a=1$  برابر ۲۴ و عدد تابع  $g$  در نقطه  $a=1$  برابر ۸ باشد؟ نگاه عدد تابع  $\frac{f}{g}$  برابر  $\frac{24}{8} = 3$  می باشد.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 24 \\ \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{24}{8} = 3$$

مثال: اگر  $f(x) = 2x + 1$  و  $g(x) = x^3 + 5$  باشد حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$  را محاسب کنید.

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{x^3+5} = \frac{2(2)+1}{(2)^3+5} = \frac{5}{13}$$

اما هیچ وقت جنبه سوال ساده‌ای را با مانع ذهنی بایک جایگذاری ساده به جواب برسیم. در همه‌ی سوالات بیست از جایگذاری به حالت  $\frac{0}{0}$  می‌رسیم و این حالت «مبهم» می‌گویند و باید رفع اجماع کنیم.

مثال: حاصل عدد زیر را محاسب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\Delta x - 10} \xrightarrow{\text{حل}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\Delta x - 10} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\text{رفع اجماع: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\Delta x - 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{\Delta(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 2} x+2 = 4$$

چگونه رنج انجام کنیم؟

وقتی  $x$  است  $2$  است  $2$  دور  $(x-2)$  در واقع عبارت  $(x-2)$  عامل مضربگشته ماست، باید از صورت مضرب حذف شود.

\* عامل مضربگشته ماتریک دیدن در صورت مضرب حذف کردن است که باید آن را بیرون کشیم و از صورت مضرب حذف کنیم. بدین این کار را نوشتن یار آن ماس زیر از ناک شب واجبند است.

یار آن ماس: فاکتورگیری

$$3x - 6 = 3(x - 2)$$

$$2x - 4 = 2( )$$

$$4x - 4 = 4(x - 1)$$

$$-2x - 9 = -2( )$$

$$-2x + 6 = -2(x - 3)$$

$$-x^2 + x = -x( )$$

$$-2x + 4 = 2(-x + 2)$$

$$x^2 + x = x( )$$

$$5x^2 + 10x = 5x(x + 2)$$

$$x^3 + 2x = x( )$$

$$-3x - 3 = -3(x + 1)$$

$$x^3 + 4x^2 - 4x = x( )$$

انتظار زوج

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

یار آن ماس، انتظارها

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

$$x^2 - 34 = (x - 4)(x + 4)$$

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

$$x^2 - 24x = x(x^2 - 24) = x(x - 4)(x + 4)$$

$$x^2 - 25 =$$

$$x^2 - 4x =$$

$$x^2 - x =$$

انتارهای مشترک

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$x^2 + 5x + 4 = (x+2)(x+3)$$

$$x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$

$$x^2 + 7x - 8 = (x-2)(x+4)$$

$$-x^2 - x + 2 = -(x^2 + x - 2) = -(x-1)(x+2)$$

حامل مشترک  
حامل مربع

$$x^2 - 3x - 4 =$$

$$x^2 + x - 4 =$$

$$x^2 + 5x - 24 =$$

$$-x^2 - x + 12 =$$

حلقه و لانگر

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

مادر      جمع لانگر      جمع حلقه

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$x^3 - 8 \Rightarrow x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$x^3 - 1 = (\dots)(\dots)$$

$$x^3 + 8 \Rightarrow x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$x^3 + 1 = (\dots)(\dots)$$

$$(\sqrt[3]{x} + 2)(\dots) = x - 8$$

$$5\sqrt[3]{x} - 10 = 5(\sqrt[3]{x} - 2) = 5(\dots)(\dots)$$

$$(\sqrt[3]{x} - 1)(\dots) = x - 1$$

$$3\sqrt[3]{x} + 3 = 3(\sqrt[3]{x} + 1) = 3(\dots)(\dots)$$

تمرین ۱: حامل حرکت از عداسی زیر را مطالعه کنید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 125}{x^2 - 25} =$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} =$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x} =$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-x^2 + 3x + 10}{x^2 - 4} =$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{5x} =$$

تذکره: اگر هیچ جوره نتوانیم عبارت رو تجزیه کنیم ← عبارت رو بر عامل تقسیم کنیم تا عبارت تجزیه بشه.

$$۶) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7x + 2}{x^2 - 4} =$$

$$۷) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} =$$

$$۸) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{-5x^3 + 10x^2 + x - 2} =$$

$$۹) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9} =$$

برای رفع ابهام تقاضای که صورت یا مخرج را در یکان دارد ← باید صورت و مخرج را در صورتی که عبارت را یکسان دارند ضرب کنیم

مثال: عامل حد  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{x^2 - 4}$  را ساده کنیم

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{x^2 - 4} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{x^2 - 4} \times \frac{\sqrt{3x-2} + 2}{\sqrt{3x-2} + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x-2) - 4}{(x^2 - 4)(\sqrt{3x-2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 6}{(x^2 - 4)(\sqrt{3x-2} + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{3x-2} + 2)} = \frac{3}{(4)(4)} = \frac{3}{16}$$

یادآوری: در مخرج عبارت طس زیر را بنویسید

$$\sqrt{x} - 3 =$$

$$2 + \sqrt{3x-1} =$$

$$\sqrt{x+1} - 3 =$$

$$-\sqrt{3x-5} + 1 =$$

یادآوری: مخرج عبارت طس زیر را بنویسید  
www.my-dars.ir

$$* \frac{2x^2 - 2x}{\sqrt{x+1} - 3}$$

$$* \frac{2x^2 - x + 2}{\sqrt[3]{x+2}}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{3x+6} - 2}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x+3}}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$$

تذکره: وقتی هم در صورت و هم درخرج را یکسان داریم ← یک بار در صورت و یک بار درخرج صورت و یک بار درخرج مخرج

$$14) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{5x+4} - 3}$$

$$۱۵) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{2x}}{\sqrt{x+7} - 3}$$

تذکره: گاهی در اکیال های تدریس مجبوریم ۲ یا چند بار فرجه در جزوه می کنیم.

$$۱۶) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{4x+5}} - 2}{x^2 + 3x - 4}$$

$$۱۷) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\sqrt{2x+7} + 4} - 3}{3x - 3}$$

# مای درس

## گروه آموزشی عصر

تذکره: برای رفع ابهام عبارت های رادیکالی با فرم ۳ ← از اعداد حلق و لاغر استفاده می کنیم

$$۱۸) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$۱۹) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x^2 + 3x + 2}$$

$$۲۰) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 1}$$

$$۲۱) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{9x - 3} - 3}{x^2 - 9}$$

$$۲۲) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2x+2} - 2}{x^2 - 5x + 4}$$

$$۲۳) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{1-x} - 1}$$

مای درس

گروه آموزشی عصر

تذکره: گاهی هم رادیکال با قدرجه ۲ داریم و هم با قدرجه ۳.

www.my-dars.ir



تذکره: گاهی قدر مطلق را با چیزی صیغیح داریم که باید آنرا حذف کنیم و بعد رفع ابهام کنیم

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|3x-1|-2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x-1)-2}{x^2-1}$$

قدر مطلق درون آن  $\oplus$  باشد  $\leftarrow$  منورنش بیرون می آید  $\leftarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-3|-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-3)-2}{x^2-4}$$

درون آن  $\ominus$  باشد  $\leftarrow$  قدرش بیرون می آید  $\leftarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x - [x]}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{x+1}$$

چیزی صیغیح  $\leftarrow$  و جابجایی باید مقدار عددی آن را قرار دهیم  $\leftarrow$

$$۲۴) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|-2x+1|-3}{x^2-2x}$$

$$۲۵) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2+|x^2-3|}{x^3+1}$$

$$۲۶) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - [x]}{x^2 + 3x + [4x]}$$

$$۲۷) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - 3x + 2|}{x[x] - 2}$$

مای دارس  
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

(سازش تعیین به خارج ۸۵)

تعیین ۲، حاصل  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{3-x}}{x^2 + x}$  کدام است؟

۱)  $\frac{-7}{3}$

۲)  $\frac{-1}{3}$

۳)  $\frac{2}{3}$

۴)  $\frac{5}{3}$

(سازش تعیین به خارج ۹۷)

تعیین ۳، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3-\sqrt{x}} - 1}$  کدام است؟

۱)  $-112$

۲)  $-92$

۳)  $-82$

۴)  $-72$

(سازش تعیین به خارج ۸۸)

تعیین ۴، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}$  کدام است؟

۱)  $-4$

۲)  $-2$

۳)  $2$

۴)  $4$

(سازمان سنجش ۹۰)

تذکره ۵: حد عبارت  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - x - 7|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}}$  وقتی  $x \rightarrow 2^-$  کدام است؟

-۳ (۱)

-۲ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)

(سازمان سنجش ۹۸)

تذکره ۶: حد عبارت  $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^2 + 10x + 14}{12 + 4\sqrt{x}}$  وقتی  $x \rightarrow -8$  کدام است؟

-۲۴ (۱)

-۱۸ (۲)

-۱۲ (۳)

-۴ (۴)

(سازمان سنجش ۱۴۰۱)

تذکره ۷: حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^3 - [x^3]}$  کدام است؟

۱ (صفر)

$\frac{1}{2}$  (۲)

۱ (۳)

$+\infty$  (۴)

مای دارس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

تمرین ۸: اگر  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{ax+3a}{1-\sqrt{2x+14}} = 2$  باشد، آنگاه  $a$  کدام است؟ (خوب منبر دوازدهم)

- ۵ (۱)
- ۳ (۲)
- ۳ (۳)
- ۵ (۴)

تمرین ۹: اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{ax+1}-3}{\sqrt{x}-2} = b$  باشد، آنگاه مقدار  $ab$  کدام است؟ (خوب منبر دوازدهم)

- $\frac{2}{3}$  (۱)
- $\frac{1}{2}$  (۲)
- $\frac{4}{5}$  (۳)
- $\frac{1}{5}$  (۴)

تمرین ۱۰: اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-\sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{1}{2}$  باشد، آنگاه  $b$  کدام است؟ (سازگار، یاقوت خواجه ۹۵)

- ۲ (۱)
- ۱ (۲)
- ۱ (۳)
- ۲ (۴)

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

حد نامتناهی (عربی تعاریف)

صفحه ۵۳ تا ۵۷ کتاب درسی

همسایگی: هر بازه‌ی باز شامل عدد حقیقی  $\alpha$  را یک همسایگی  $\alpha$  می‌گویند.

به عبارتی دیگر اگر  $(\alpha, \beta) \in \alpha$  باشد آنگاه بازه  $(\alpha, \beta)$  یک همسایگی  $\alpha$  است.

۱ بازه‌ی  $(1, 4)$  یک همسایگی برای عدد ۲ است چون  $2 \in (1, 4)$  این بازه است.

۲ بازه‌ی  $(-2, 2)$  یک همسایگی برای عدد ۳ است چون  $3 \notin (-2, 2)$  درون این بازه است.

۳ بازه‌ی  $(0, 3)$  یک همسایگی برای عدد ۵ نیست چون  $5 \notin (0, 3)$  درون این بازه جایی ندارد.

تعریف ۱: اگر بازه‌ی  $(m-2, m+2)$  یک همسایگی برای عدد  $m$  باشد عدد  $m$  را مشخص کنیم.

تعریف ۲: برای کدام مجموعه مقادیر  $x$  بازه‌ی  $(x-1, x+1)$  یک همسایگی عدد ۳ باشد؟

(سازمان ریاضی ۹۸)

۱  $\emptyset$

۲  $\{2\}$

۳  $1 < x < 2$

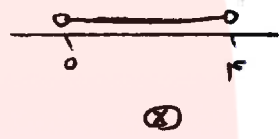
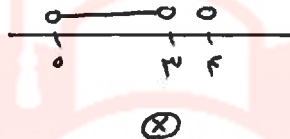
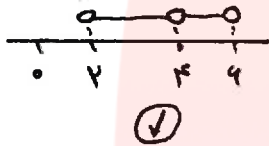
۴  $1.5 < x < 2$

همسایگی محذوف: اگر  $a$  را از بازه‌ی  $(a, b)$  حذف کنیم آنگاه مجموعه‌ی  $\{a\} - (a, b)$  را یک همسایگی محذوف برای  $a$  می‌گویند.

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

همسایگی محذوف عدد  $a$  را به صورت مقابل نشان می‌دهیم  $\leftarrow (a, b) - \{a\} = (a, b) \cup (b, a)$

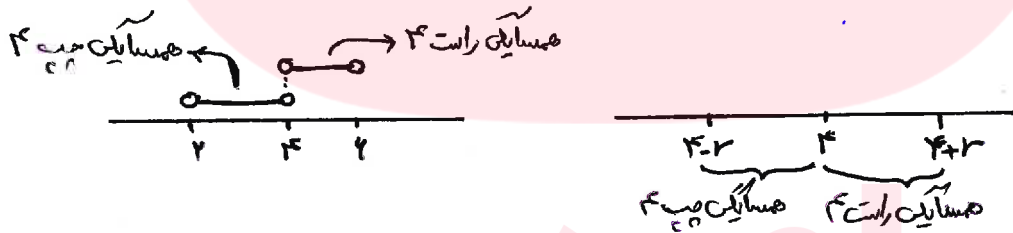
- {4} - (2, 4) یک همسایگی محذوف برای عدد 4 است، چون عدد 4 در این بازه بوده و حذف شده است.
- {4} - (0, 3) یک همسایگی محذوف عدد 4 نیست، چون 4 اصلاً در این بازه نبوده است.
- {4} - (0, 4) یک همسایگی محذوف عدد 4 نیست چون 4 اصلاً در این بازه نبوده است.



همسایگی چپ و راست: اگر 2 عددی مثبت باشد آنگاه  $(x_0, x_0 + 2)$  یک همسایگی راست  $x_0$  است.  
 $(x_0 - 2, x_0)$  یک همسایگی چپ  $x_0$  است.

مثال: چندتا همسایگی راست برای عدد 4 بنویسیم:  $(4, 5)$  -  $(4, 7)$  -  $(4, 100)$  -  $(4, 1000)$

مثال: چندتا همسایگی چپ برای عدد 4 بنویسیم:  $(2, 4)$  -  $(-2, 4)$  -  $(0, 4)$  -  $(3, 9, 4)$  -  $(-100, 4)$



{4} - (2, 7) : همسایگی عدد 4 ← محذوف نیست

{4} - (4, 7) : همسایگی راست عدد 4 ← محذوف نیست

{4} - (2, 4) : همسایگی چپ عدد 4 ← محذوف نیست

{4} - (2, 7) : همسایگی محذوف عدد 4 ← محذوف نیست

نکته:

نکته: هر همسایگی محذوف  $x_0$  شامل حداقل یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ  $x_0$  است.

تمرین ۱: درست یا نادرست هر عبارت را مشخص کنید.

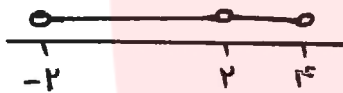
الف: بازه  $(-3, 2)$  یک همسایگی راست عدد  $2$  می باشد.

ب:  $\{3\} - (2, 1)$  یک همسایگی محذوف عدد  $3$  می باشد.

ج: بازه  $(1, 4)$  و  $(-1, -4)$  به ترتیب همسایگی راست و چپ عدد  $-1$  هستند.

د:  $(1, 4) \cup (-2, 1)$  یک همسایگی محذوف برای عدد  $1$  است.

تمرین ۲: شکل زیر مربوط به همسایگی محذوف چه عددی است؟



ب: چند همسایگی راست برای عدد  $2$  می توان نوشت؟

ج: چند همسایگی چپ برای عدد  $4$  می توان نوشت؟

تمرین ۳: اگر  $(1, m-2) \cup (m+2, -2)$  یک همسایگی محذوف عدد  $\alpha$  باشد  $\alpha$  را بیابید.

تمرین ۴: اگر  $(\alpha+3, 3\alpha) \cup (-2, 2\alpha-1)$  یک همسایگی محذوف عدد  $b$  باشد  $b$  را بیابید.

۲۱

۳۲

۵۳

۶۴

تمرین ۵: اگر مجموعه  $(-1, m^2-3) \cup (1, m)$  همسایگی محذوف  $1$  باشد  $m$  را بیابید.

-۱۱

۲۵

-۲۳

$\pm 2$

حالات همسانی و انواع اون رو یاد گرفتن بدیم سلف اصل مطلب:

حد نامتناهی (حد بی نهایت):

در حد تابع کسری (در سنامه  $\frac{0}{0}$ ) همیشه به  $\frac{0}{0}$  میخوره بدیم منفرجه و سبب از رفیع انجام مکتب عدد من رسیه هم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b$$

ولی در این جا جواب ما عدد نیست و جواب ما همیشه  $\pm \infty$  است:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm \infty \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm \infty$$

یعنی در این جا همیشه به  $\frac{عدد}{0^+}$  یا  $\frac{عدد}{0^-}$  می رسیه و جواب هم  $\pm \infty$  است.

۴ حالت ممکن ←

$$\frac{0^+}{0^+} = +\infty \quad \frac{0^+}{0^-} = -\infty \quad \frac{0^-}{0^+} = -\infty \quad \frac{0^-}{0^-} = +\infty$$

مثال د

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{x-3} = \frac{+3}{0^+} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{x-3} = \frac{+3}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

نکته مهم: در حد تابعی بالا فقط در صورتی جواب  $\pm \infty$  می شود که مخارج منفرد باشند و اگر هم از مطلق باشند

عبارت تعریف نشده می نشود.

$$\frac{عدد \oplus 0}{عدد} = \pm \infty$$

$$\frac{مطلق 0}{مطلق 0} = 0$$

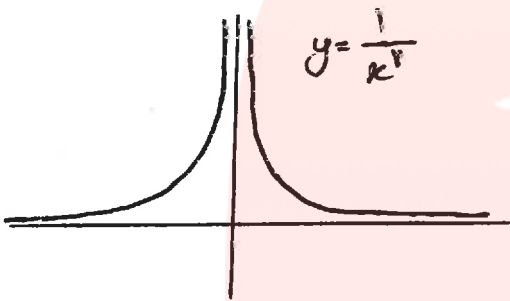
$$\frac{عدد}{مطلق 0} = 0$$

$$\frac{عدد 0}{مطلق 0} = 0$$



نکته: وقتی حد تابع برابر  $+\infty$  یا  $-\infty$  می شود یعنی تابع در آن نقطه حد ندارد

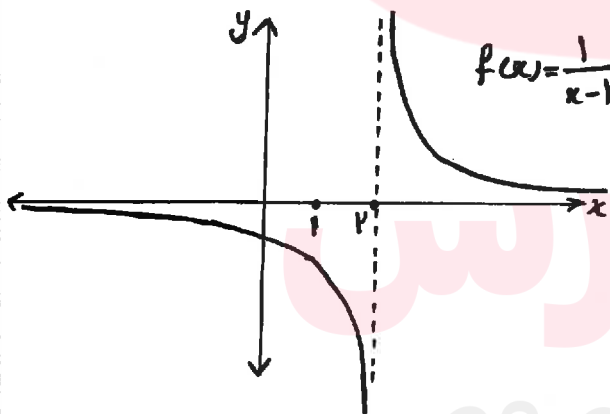
بررسی حد به نهانیت روش نورانی:



$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} &= +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

در جیب و حد راست این تابع در نقطه  $x=0$  برابر  $+\infty$  است پس لیم حد این تابع در نقطه  $x=0$  برابر  $+\infty$  است

عبارتی این تابع در همسایگی نقطه  $+\infty$  میل می کند



$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

گروه آموزشی عصر

نکته: اندک مخرج درون قدر مطلق یا راسی توان زیرج باشد ← مخرج  $0^+$  من شود.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{+3}{0^+} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{+3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-3}{|x-1|} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-3}{|x-1|} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

نکته: اندر وجه مخرج بیشتر از راسی باشد تعیین  $0^+$  یا  $0^-$  بودن مخرج ← تجزیه می کنیم  
عدد توان می کنیم ←

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{+2}{(x-1)(x+2)} = \frac{+2}{(+)(0^-)} = \frac{+2}{0^-} = +\infty$$

نکته: دیرین حاصل  $\sin x$  و  $\cos x$  همواره عدس در بازه  $[-1, 1]$  است:

\* حاصل  $1 + \sin x$ ،  $1 + \cos x$  همواره عدس نامنفی است.

\* معبار عبارت مایع مانند  $1 - \cos x$  را اینگونه مایع می کنیم

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \rightarrow -1 \leq 1 - \cos x \leq 2$$

# مای درس

## گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

تمرین ۱: حاصل حرکت از عددی زیر را تعیین کنید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x}{x-4}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{2x-2}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{x^2}$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+5}{(x-2)^2}$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x}{|x-\frac{1}{2}|}$$

$$۷) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2-[x]}{1-2x}$$

$$۸) \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x-[x]}{x+2}$$

$$۹) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2}{1-[x]}$$

$$۱۰) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-[x]}{\frac{1}{2}[x]-1}$$

$$۱۱) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]-2}{|x-2|}$$

$$۱۲) \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{[x]+2}{x^2+3x}$$

$$۱۳) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x+2}{x^2-9}$$

$$۱۴) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x^2+2x-3}$$

$$۱۵) \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{2x^2+3x+1}{x^2+x}$$

$$۱۶) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[2-x]-1}{x^2-4x+9}$$

$$۱۷) \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{-2}{1+\cos x}$$

$$۱۸) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+3}{\sin x}$$

$$۱۹) \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{2}{\cos x}$$

$$۲۰) \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-2\sin x}{1+\cos x}$$

$$۲۱) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \tan x$$

$$۲۲) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{\cot x + \sqrt{2}}{\cot x - \sqrt{2}}$$

تقریب ۲، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x}{1-x^2}$  کدام است؟

۱)  $+\infty$       ۲)  $-\infty$       ۳) صفر      ۴) ۱

(آب تله)

تقریب ۳، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x+1}{x[x]}$  کدام است؟

۱)  $+\infty$       ۲)  $-\infty$       ۳) صفر      ۴)  $-1$

(آب تله)

تقریب ۴، حاصل  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{[x+1]}{|x+1|}$  کدام است؟

۱)  $-\infty$       ۲)  $+\infty$       ۳) صفر      ۴) ۱

(سراسری تجربی ۹۹)

تقریب ۵، حاصل  $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{[x]-3}{x+2}$  کدام است؟

۱)  $-\infty$       ۲)  $-1$       ۳) صفر      ۴) ۱

(آب تله)

تقریب ۶، حاصل  $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{[\sin x]}{x-\pi}$  کدام است؟

۱)  $-\infty$       ۲)  $+\infty$       ۳) صفر      ۴) ۱

(سراسری ریاضی ۷۲)

تقریب ۸، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{\tan x}$  کدام است؟

۱) صفر      ۲)  $+\infty$       ۳) ۱      ۴)  $-\infty$

(کانون)

تقریب ۹، حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sin x - 1}$  کدام است؟

۱) صفر      ۲) ۱      ۳)  $+\infty$       ۴)  $-\infty$

(سراسری تجربی ۸۹)

تقریب ۱۰، حاصل  $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{1+\cos x}$  کدام است؟

۱)  $+\infty$       ۲)  $-\infty$       ۳) ۱      ۴) صفر

تذکره: گاهی اوقات بست از جا بلندتر  $\pm$  بیجم هر رسم که باید زنج اها کنیم بست از زنج اها  $\pm$   $\frac{x^2}{x^2}$   $\pm \infty$

تمرین ۱۱، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x-2]}{\sqrt{x+2} - x}$  کدام است؟

(۱) صفر (۲) -۱ (۳)  $+\infty$  (۴)  $-\infty$

تمرین ۱۲، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{(1-x)^2 (x^2 - 2x + 1)}$  کدام است؟

(۱)  $+\infty$  (۲)  $-\infty$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{1}{3}$

تمرین ۱۳، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^3 + x - 2|}{x^3 - x^2 - x + 1}$  کدام است؟

(۱) صفر (۲)  $+\infty$  (۳)  $-\infty$  (۴)  $\frac{1}{4}$

تمرین ۱۴، در مورد تابع  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + |x|}$  کدام بیان درست است؟ (ساده و تعبیر ۹۸)

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  (۴)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  (۳)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$  (۲)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$  (۱)

تمرین ۱۵، در مورد تابع باضابطه  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x}$  کدام بیان درست است؟ (ساده و تعبیر ۹۸)

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} f(x) = +\infty$  (۴)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} f(x) = -\infty$  (۳)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} f(x) = +\infty$  (۲)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} f(x) = -\infty$  (۱)

(خند سبز)

تقریب ۱۴: اگر  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{ax+b}{a+\cos x} = +\infty$  باشد مقدار  $b$  کدام است؟

- ۱-۱
- ۲-۲
- ۳-۱
- ۴-۲

(خند سبز)

تقریب ۱۷: اگر  $\lim_{x \rightarrow L^+} \frac{x+1}{x^2-x-4} = +\infty$  باشد مقدار  $L$  کدام است؟

- ۱-۲
- ۲-۳
- ۳-۴
- ۴-۱

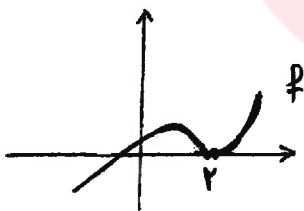
(خند سبز)

تقریب ۱۸: نمودار تابع  $f(x) = \frac{\cos x}{\tan^2 x - 1}$  را در اطراف  $x = \frac{\pi}{3}$  چگونه است؟



(خند سبز)

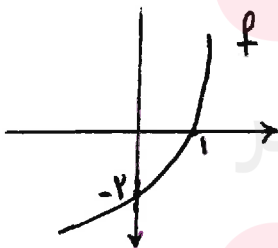
تقریب ۱۹: با توجه به نمودار  $f$  حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{f(x)}$  کدام است؟



- ۱-۱
- ۲-+∞
- ۳-∞-
- ۴-∞+

(خند سبز)

تقریب ۲۰: اگر نمودار تابع  $f$  در شکل زیر باشد و  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f}{f-1}$  وقتی  $x \rightarrow 2$  کدام است؟

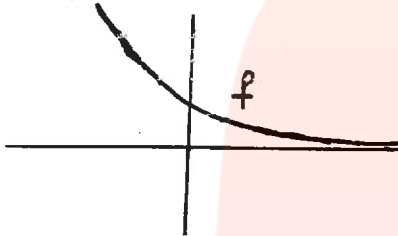


- ۱-∞+
- ۲-∞-
- ۳-∞+
- ۴-۱

صفحه ۵۸ تا ۶۴ نام درس

۴ عدد بی نهایت

عدد بی نهایت ۲ حالتی لغت می شود که  $x$  به سمت  $+\infty$  یا  $-\infty$  میل می کند (  $\pm\infty$  )



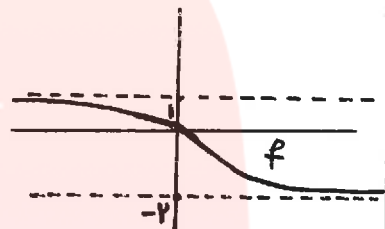
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

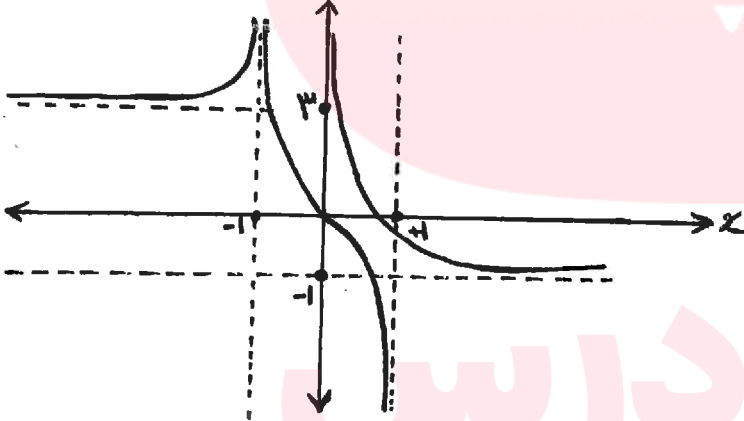
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

توجه! در این مثال، نمودار تابع  $f$  به سمت  $+\infty$  و  $-\infty$  از هر دو طرف میل می کند.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \dots$$

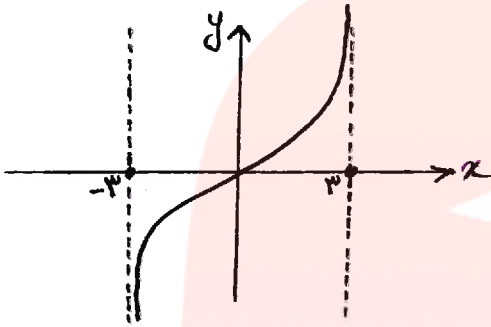
$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \dots$$

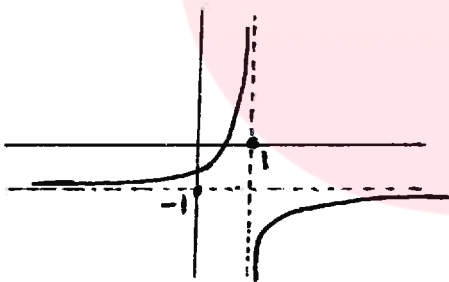
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x-2) = \dots$$

تجرب ۲: بازه‌ها و رفتار تابع  $f$  اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty$  باشد حاصل  $[a] + [b]$  کدام است؟



- ۱) منفی
- ۲)  $-1$
- ۳)  $-2$
- ۴)  $1$

تجرب ۳: مشخصات تابع  $f(x)$  مطابق شکل زیر است اگر  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  و آنجا حاصل  $\lim_{x \rightarrow (-b)^-} f(x)$  (نتیجه)



- ۱)  $L$
- ۲)  $-1$
- ۳)  $-\infty$
- ۴)  $+\infty$

مای درس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)



حالاتی که در آن حد از بی نهایت:

در حل مسألات «حد از بی نهایت» فقط به نامی یادمان را در نظر می‌گیریم و بقیه جمله‌ها را نادیده می‌گیریم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 - x + 1}{-x^2 - 2x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2}{-x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - x^2 + 2}{x^4 - 2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 1^5}{4x^5 - 2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{4x^5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - 3x^5 - 1) \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a - x^2) \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2)$$

بعد از این که به نامی یادمان را نوشتیم +∞ یا -∞، x و سایر آن‌ها که در آنجا بی نهایت می‌گیرند

در یک حالت نامی زیر ممکن است رفع دهد: (نیازی به استفاده از نقطه تفرد)

$(+\infty)(+\infty) = +\infty$	$(+\infty)^2 = +\infty$	$0 \times (\pm\infty) = 0$	$(\pm عدد) + (+\infty) = +\infty$
$(+\infty)(-\infty) = -\infty$	$(-\infty)^2 = +\infty$	$(+ عدد)(+\infty) = +\infty$	$(\pm عدد) - (-\infty) = -\infty$
$(-\infty)(+\infty) = -\infty$	$(+\infty)^3 = +\infty$	$(- عدد)(+\infty) = -\infty$	$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
$(-\infty)(-\infty) = +\infty$	$(-\infty)^3 = -\infty$	$(- عدد)(-\infty) = +\infty$	$\frac{\pm عدد}{\infty} = 0$

نکته ۱: در تابع کسری ۳ حالت زیر ممکن است پیش آید:

①  $\infty / \infty$  صورت =  $\infty$  یا  $-\infty$  ← جواب یک عدد  $+b$  یا  $-a$  است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 2x - x}{2x^2 + x^2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 5}{3x - 2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

②  $\infty / \infty$  صورت <  $\infty$  یا  $-\infty$  ← جواب  $+\infty$  یا  $-\infty$  است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + 3} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{2} = \frac{3(+\infty)}{2} = +\infty$$

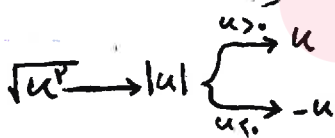
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 5x}{2x + x^3} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1(-\infty) = +\infty$$

③  $\infty / \infty$  صورت >  $\infty$  یا  $-\infty$  ← جواب  $+\infty$  یا  $-\infty$  است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2x^2}{1 - x^2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x^3}{2x^4 - x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{2x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{2x} = \frac{-1}{2(+\infty)} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

نکته ۲: اگر بار اولی جواب  $\infty$  یا  $-\infty$  بود می توانیم به مرتبه بالاتر از مرتبه توان  $x$  در صورت و مخرج



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{4x^2 - 4x}}{18x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + |2x|}{18x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{18x} = \frac{1}{9}$$

نکته ۳: آرد با برآکت مواجه شدیم ۲ حالت داریم:

① درون برآکت عدوس غیر صفر است ← در این حالت می‌توان راحت است

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{2x+1}{5x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{2x}{5x} \right] = \left[ \frac{2}{5} \right] = \left[ 0.4 \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{-4x+1}{2+3x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{-4x^2}{3x^2} \right] = \left[ \frac{-4}{3} \right] = \left[ -1.33 \right] = -1$$

② درون برآکت عدوس صفر است (مثل ۲) ← باید مشخص کنیم درون برآکت ۲+ است یا ۲- یا ۰ یا بی‌نهایت است

یک عدد بزرگ مانند ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ مشخص می‌شود

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{3x-1}{x+4} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{3x}{x} \right] = [3] = ? \rightarrow \left[ \frac{3(100)-1}{100+4} \right] = \left[ \frac{299}{104} \right] = [2.87] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{2x+5}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{2x}{x} \right] = [2] = ? \rightarrow \left[ \frac{2(100)+5}{100-1} \right] = \left[ \frac{205}{99} \right] = [2.07] = 2$$

نکته ۴: گاهی اوقات ۲ حالت  $\infty - \infty$  داریم که بی‌معنی است و باید رفع ابهام کنیم

بسیار رفع ابهام از حالت  $\infty - \infty$  ← آرد عبارت را یکی می‌بورد ←  $\infty - \infty$    
 ← آرد یا حتی کسر با مخرج صفر بورد ← مخرج مشترک

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{4x^2 + 4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - |2x|) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 2x = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{4x^2 + 4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{4x^2 + 4x} \times \frac{2x + \sqrt{4x^2 + 4x}}{2x + \sqrt{4x^2 + 4x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - (4x^2 + 4x)}{2x + \sqrt{4x^2 + 4x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{2x + \sqrt{4x^2 + 4x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2x + \sqrt{4x^2 + 4x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{5x} = \frac{4}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} \right) = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} \rightarrow \infty - \infty \text{ بی‌معنی}$$

$$\text{رفع ابهام: } \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1 - 2(x+2)}{(x-2)(x+2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1 - 2x - 4}{(x-2)(x+2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{-2x - 3}{(x-2)(x+2)} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{-2(x-2)}{(x-2)(x+2)} \right) = \frac{-2}{2} = -1$$

نتیجه ۵:

$$\left[ \frac{1}{+\infty} \right] = \left[ \frac{1}{1 \dots} \right] = [0^+] = 0$$

$$\left[ \frac{-1}{+\infty} \right] = \left[ \frac{-1}{1 \dots} \right] = [0^-] = -1$$

$$\left[ \frac{1}{-\infty} \right] = \left[ \frac{1}{-1 \dots} \right] = [0^-] = -1$$

$$\left[ \frac{-1}{-\infty} \right] = \left[ \frac{-1}{-1 \dots} \right] = [0^+] = 0$$

نتیجه ۶: برای تنهایی بدان راه را باید باز کنیم و بنویسیم...

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^2 - (x+2)^2}{x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1 - (x^2 + 4x + 4)}{x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x - 3}{x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{x} = -4$$

# مای درس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

تمرین ۱: عامل مرتفع را از سینه را مناسب کنید

$$۱) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{5x^2 - 2}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x + x - 2}{x + 2}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 2x + x^2}{2 - x}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 2x - 2x^3}{-x^2}$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{3x}{x^2} \right)$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 + \frac{3}{x^2}}{-\frac{1}{x} + 2}$$

$$۷) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 5x + 2)$$

$$۸) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{2}{x^2} - x - 1 \right)$$

$$۹) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - |5x|}{x - 1}$$

$$۱۰) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|-2x + 1| - x}{x^2 - 2}$$

$$۱۱) \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - |x|)$$

$$۱۲) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - 1| + |-2x + 1|}{|-x - 2|}$$

$$۱۳) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + \sqrt{9x^2 - 1}}{2x - 2}$$

$$۱۴) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + \sqrt{3x^2 - x}}{2\sqrt{2}}$$

$$۱۵) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x + x^2} + x}{x(x+1)}$$

$$۱۶) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{x} \right]$$

$$۱۷) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{2}{2x - 2} \right]$$

$$۱۸) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{1}{x} \right]$$

$$19) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^3}{x^2+1} \right]$$

$$20) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{3x+1}{-2x} \right]$$

$$21) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{5x+1}{x-3} \right]$$

$$22) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2+2) \left[ \frac{4x-1}{2x+1} \right]$$

تمرین ۲، عبارت  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ ،  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ ، ترتیب ۲ صحیح است؟

ب) تابع  $f$  را به گونه‌ای رسم کنید که هر دو شرط بالا را داشته باشد.

تمرین ۳ مقدار  $a$ ،  $b$  را طوری بیابید که  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3+bx^2+c}{4x^2-2} = -\frac{2}{3}$  باشد.

تمرین ۴ نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x > 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$  را رسم کنید.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ،  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  را بیابید.

مای دارس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

تربیت ۵: حاصل  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - x\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}} + 4x - 3}$  کدام است؟

$+\infty$  (۴)      منفی (۳)       $\frac{1}{3}$  (۲)       $\frac{1}{3}$  (۱)

تربیت ۶: حد تابع  $f(x) = \frac{3x^4 - 2x^3 - 5x}{-2x + 1}$  در  $+\infty$  و  $-\infty$  ترتیب کدام است؟

$+\infty, -\infty$  (۴)       $-\infty, +\infty$  (۳)       $-\infty, -\infty$  (۲)       $+\infty, +\infty$  (۱)

تربیت ۷: حد  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2+1)^2 - (x^2-3)^2}{(x+1)^2 + (x-1)^2}$  در  $+\infty$  و  $-\infty$  کدام است؟

$-\infty$  (۴)       $-2$  (۳)       $2$  (۲)       $1$  (۱)

تربیت ۸: حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x}}$  کدام است؟

منفی (۴)       $2$  (۳)       $-\infty$  (۲)       $+\infty$  (۱)

تربیت ۹: حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2x+4| - 3|x-1|}{|2-x| - 3x}$  کدام است؟

$\frac{1}{2}$  (۴)       $\frac{1}{2}$  (۳)       $\frac{1}{2}$  (۲)       $-\frac{1}{2}$  (۱)

(صفتی سنج)

تربیت ۱۰: حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+7x} - \sqrt{9x^2+11x}}{|x| + \sqrt{4x^2+10x}}$  کدام است؟

$-1$  (۴)       $1$  (۳)       $\frac{2}{3}$  (۲)       $\frac{2}{3}$  (۱)

(سازمان تعریف خارج ۹۸)

تربیت ۱۱: دانسته  $f(x) = x - \sqrt{4x^2+x}$  باشد حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  کدام است؟

$3$  (۴)       $2$  (۳)       $-1$  (۲)       $-2$  (۱)

تمرین ۱۲: مقدار  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left( \sqrt{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}} \right)$  کدام است؟ (سازش تجربی ۱۴۰۰)

۱۴۱) منفی  $\quad ۱۴۲) \frac{\sqrt{2}}{2}$   $\quad ۱۴۳) \frac{\sqrt{2}}{4}$   $\quad ۱۴۴) \sqrt{2}$

تمرین ۱۳: اگر  $f(x) = \frac{-1}{x+1}$  باشد حاصل  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ f)(x)$  کدام است؟ (سازش ریاضی ۷۳)

۱۴۱)  $-\frac{1}{2}$   $\quad ۱۴۲) \frac{1}{2}$   $\quad ۱۴۳) \frac{1}{4}$   $\quad ۱۴۴) \frac{1}{8}$

تمرین ۱۴: حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x + 2^x}{4x + 3^x}$  کدام است؟ (خلاق سبز)

۱۴۱)  $\frac{2}{3}$   $\quad ۱۴۲) \frac{1}{3}$   $\quad ۱۴۳) \frac{2}{9}$   $\quad ۱۴۴) \frac{1}{9}$

تمرین ۱۵: حاصل  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{4x - 2}{x + 1} \right]$  کدام است؟

۱۴۱)  $\frac{2}{3}$   $\quad ۱۴۲) \frac{2}{5}$   $\quad ۱۴۳) \frac{2}{7}$   $\quad ۱۴۴) \frac{2}{9}$

تمرین ۱۶: اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-ax^2 - 4x + 5x}{5x^2 - x^2 - 1} = 2$  باشد حاصل  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a + x)$  کدام است؟

۱۴۱)  $-4$   $\quad ۱۴۲) -14$   $\quad ۱۴۳) 4$   $\quad ۱۴۴) -4$

تمرین ۱۷: در تابع  $f(x) = \frac{ax^2 - 3x + 1}{3x^2 + x}$  اگر  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{3}$  باشد  $f(-1)$  کدام است؟

(سازش تجربی خارج ۹۱)

۱۴۱)  $-\frac{2}{3}$   $\quad ۱۴۲) \frac{2}{3}$   $\quad ۱۴۳) \frac{2}{5}$   $\quad ۱۴۴) \frac{2}{7}$

تمرین ۱۸: اگر  $n > 3$  و  $n \rightarrow \infty$  باشد  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2} + 2x + m}{mx^2 - mx + n - 1}$  کدام است؟

(سازش تجربی ۱۴۰۰)

۱۴۱)  $\frac{2}{3}$   $\quad ۱۴۲) \frac{2}{5}$   $\quad ۱۴۳) \frac{2}{7}$   $\quad ۱۴۴) \frac{2}{9}$



تمرین ۱۹: هندار تابع با تابع  $f(x) = \frac{ax+1+\sqrt{4x^2+9}}{3x-2}$  از نقطه  $(2, 1)$  میگذرد.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  کدام است؟

(ساده) تجربی (۹۶)

۱۴

$\frac{2}{3}$  (۳)

$\frac{1}{3}$  (۲)

$-\frac{1}{3}$  (۱)

تذکره: بعضی مرتبه‌ها نیاز به وضع ارقام داریم یا بدون است که  $\leftarrow$  بیجهت  $\leftarrow$  بیجهت  $\leftarrow$  بیجهت  $\leftarrow$  بیجهت  $\leftarrow$  بیجهت

تمرین ۲۰: هندار تابع با تابع  $f(x) = \frac{3x - \sqrt{x^2+5}}{ax^2+4}$  است.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{3}$  است.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  کدام است؟

(ساده) تجربی (۹۰)

$\frac{1}{3}$  (۴)

$\frac{2}{3}$  (۳)

$\frac{2}{3}$  (۲)

$\frac{2}{3}$  (۱)

تمرین ۲۱:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2-4|}{ax-x+2} = -1$  است.  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$  کدام است؟

(ساده) راضی خوار (۹۰)

$\frac{4}{3}$  (۴)

$\frac{2}{3}$  (۳)

$-\frac{2}{3}$  (۲)

$-\frac{4}{3}$  (۱)

تمرین ۲۲: تابع با تابع  $f(x) = \frac{4x^3 - 4x^2 + 1}{ax^3 + 7x^2 - 2}$  در نقطه  $(\frac{1}{2}, 2)$  میگذرد.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  کدام است؟

(ساده) تجربی خوار (۹۹)

$-\frac{4}{11}$  (۴)

$-\frac{5}{12}$  (۳)

$-\frac{4}{14}$  (۲)

$-\frac{4}{15}$  (۱)

تعیین ۲۳: تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{\alpha x - \sqrt{\alpha^2 x^2 - 1}}{\alpha x^2 - 12}$  را در نظر بگیرید. آنگاه  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{4}$  باشد. آنگاه  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  کدام است؟

- (سازنده: تجربی ۹۹)  $\frac{5}{44}$  (۲۴)  $\frac{1}{12}$  (۲۳)  $\frac{1}{18}$  (۲۲)  $\frac{1}{24}$  (۲۱)  $\frac{1}{24}$  (۲۰)

تعیین ۲۴: آنگاه  $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + x}$  باشد. حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  کدام است؟

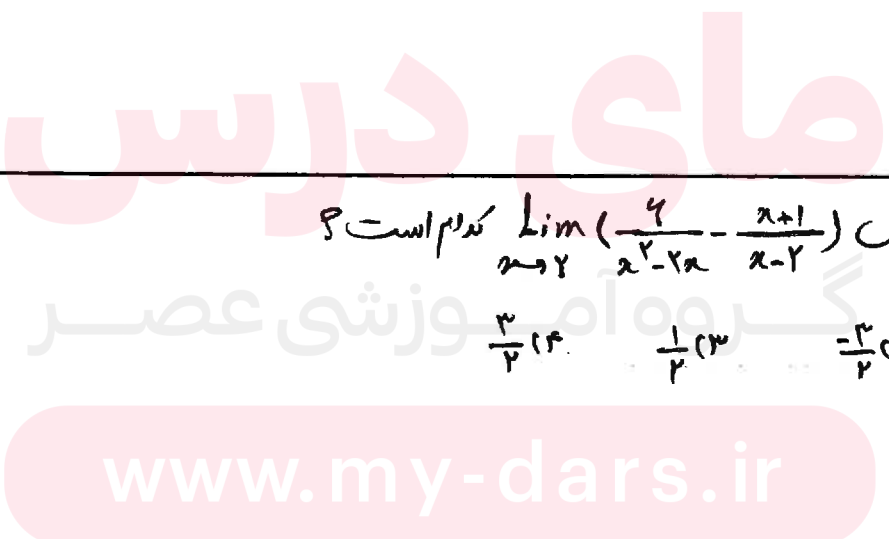
- (سازنده: تجربی ۹۸)  $1$  (۲۱)  $-\frac{1}{2}$  (۲۲)  $-\frac{1}{4}$  (۲۳)  $-\frac{1}{2}$  (۲۴)  $-\frac{1}{4}$  (۲۵)

تعیین ۲۵: حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{\alpha x - 8} - \frac{1}{x^2 - 4} \right)$  کدام است؟

- (سازنده: تجربی ۸۵)  $\frac{3}{8}$  (۲۱)  $\frac{3}{14}$  (۲۲)  $\frac{1}{8}$  (۲۳)  $\frac{1}{14}$  (۲۴)  $\frac{1}{14}$  (۲۵)

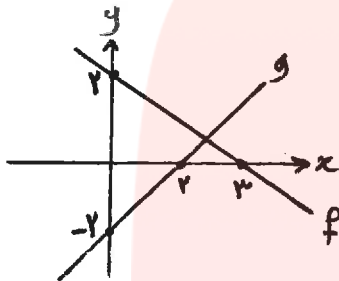
تعیین ۲۶: حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{4}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right)$  کدام است؟

- (سازنده: تجربی ۹۴)  $-\frac{5}{2}$  (۲۱)  $-\frac{3}{2}$  (۲۲)  $\frac{1}{2}$  (۲۳)  $\frac{3}{2}$  (۲۴)  $\frac{3}{2}$  (۲۵)



تذکره: گاهی اوقات به جایی می‌رسیم که در عبارات ما صفر در مخرج قرار می‌گیرد و باید از روش‌های دیگر استفاده کنیم و باز هم نتیجه بگیریم...

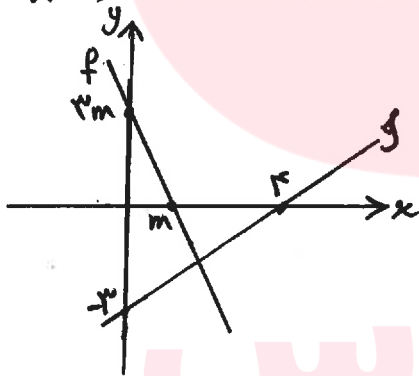
تقریب ۲۷. اگر مقدار در تابع  $f$  و  $g$  صفر نباشد، به چه صورت  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  کدام است؟ (به ترتیب)



- ۱
- ۲
- ۳
- ۴

تقریب ۲۸. شکل زیر در مقدار تابع  $f$  و  $g$  را نشان می‌دهد حاصل  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)}$  کدام است؟

(ساده‌ترین تقریب ۱۴.۲)



- ۲
- ۳
- ۴
- ۴

مای داریس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

## سوالات امتحان نهایی

① حد تابع زیر را به دست آورید. (دس ۹۷)

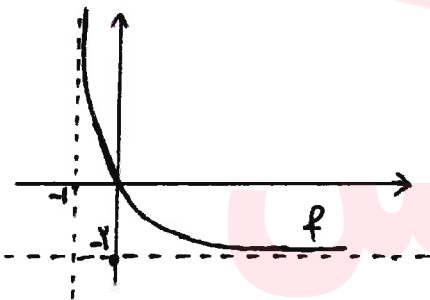
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2}$$

② حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید. (خرداد ۹۸)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{(x-1)(x+2)}$$

با استفاده از نمودار تابع  $f$ ، حد های خواسته شده را بنویسید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$$

③ حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید. (شعبه ریاضی ۹۸)

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2 - 14}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \cos x}$$

www.my-dars.ir

④ حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (دس ۹۸)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x+3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x-3|}$$

⑤ حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (قدرار ۹۹)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - \sqrt{x+4}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}$$

⑥ حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (شعبه ۹۹)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x] - 3}{|2x-1|}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{4x^3 - 11x^2 - 3}$$

⑦ حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (دس ۹۹)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}$$

۸) حد تابع زیر را در صورت وجود محاسب کنید. (خرداد ۱۴۰۰)

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{p}} \frac{[x]}{|2x+1|}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x-5}}$$

۹) حد تابع زیر را در صورت وجود محاسب کنید. (سفریور ۱۴۰۰)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \tan x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x^3 + 2x^2}{2x^3 + 9}$$

۱۰) حد تابع زیر را در صورت وجود محاسب کنید. (پس ۱۴۰۰)

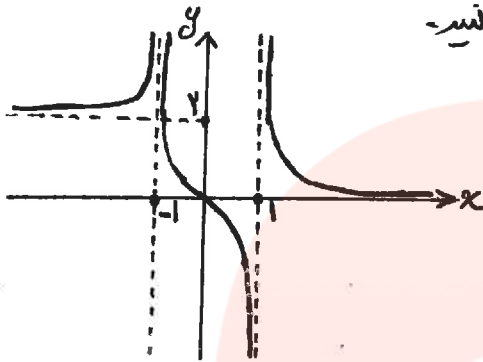
$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} \frac{2x^2 - x}{e2x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sin^2 x}$$

۱۱) حاصل حد زیر را در صورت وجود محاسب کنید. (خرداد ۱۴۰۱)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 4}{2x^2 - \sqrt{x+3}}$$

یپ: نمودار تابع  $f$  صورت شکل مقابل است. حد در نقاط زیر را محاسبه کنید.



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$$

۱۲) الف: درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. (استفاده از ۱۴.۱)

\* بازه  $(2, 5)$  یک همبندی است

یپ: حد در زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$$

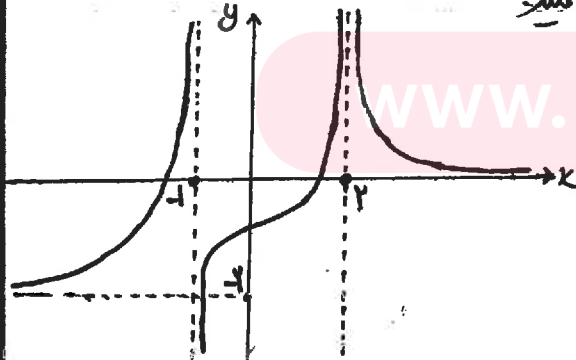
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - x}{2x + 4}$$

۱۳) الف: حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (برای ۱۴.۱)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$$

یپ: نمودار تابع  $f$  به صورت شکل زیر است. حد های زیر را محاسبه کنید.



$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$$

۱۴) حد های زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (شماره ۱۴۰۲)

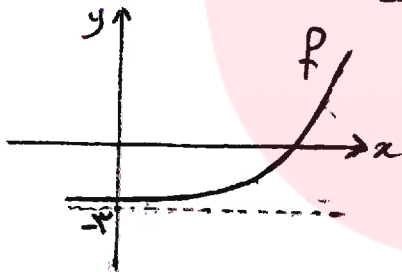
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{|\sin x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}{x - x}$$

ب) آیا مقدار  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{[x]-1}$  وجود دارد؟ چرا؟

۱۵) با توجه به نمودار تابع  $f$ ، حاصل حد های زیر را بدست آورید. (شماره ۱۴۰۲)



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$$

ب) حد های زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{|x-x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 2}{x-1}$$