

# بخش اول: خلاصه خالص از کل درس آمار و مدل سازی

## ① تعاریف و حقیقتات (آموزش چاپ)

- \* مدل سازی: بیان رابطه بین ریاضی، مدل مناسب: ابتدای درس و نتیجه به پدیده مورد نظر نزدیک
- \* اندازه گیری: برای مدل سازی عدد و رقم لازم است و اندازه گیری اولین گام برای رسیدن به اطلاعات عددی، قابل تغییر نیست و مقدار داده دارد.
- \* خطای اندازه گیری: مقدار واقعی منهای مقدار اندازه گیری شده.  $|E| < 1$  و از جمله  $E^2$  به بلافاصله نظر کنیم چون ممکن!
- \* جامعه آماری: مجموعه ای از افراد یا اشیاء که خواهم در موردشون موضوعی در مطالعه کنیم. به تعداد اعضای آن اندازه جامعه که متناهی است!
- \* نمونه آماری: بدین مسئله سرشماره که در بررس کل جامعه که خطی است یا شماره کانسیم، زیرا مجموعه ای از جامعه است که ما کانسیم مطالعه می کنیم.
- \* سرشماره: اگر تمام اعضای جامعه رو مورد مطالعه قرار بدیم و عدده گیری کنیم در واقع سرشماره را کردیم. اندازه جامعه = اندازه نمونه
- \* مشکلات سرشماره: بود و نرس نبودن تمام اعضای جامعه، وقت گیر بودن، مقرون به صرفه نبودن، از بین رفتن بعضی از اعضا از آنجا که نمونه تصادفی و در شرایطی است: امکان پذیر بودن آنها به خصوص از جامعه، اعضا دارا شدن میان جهت انتخاب
- \* روش که جمع کرده داده: استفاده از داده ها، پرسش یا مشاهده، ثبت وقایع انجام گرفته است. قبل از جمع صند بار و نمودار سوال دار
- \* پرسشنامه: سازماندهی صحیح، هدف، مهارت، سوالات واضح و ساده و کتب علمه ای عدم جمع ادراک اطلاعات، دستور العمل
- \* متغیرهای تصادفی: به موضوع یا موضوعات مورد مطالعه مسئله و وزن در بحث و سن و ... که به دو دسته کمی و کیفی تقسیم می شود
- \* متغیرهای کمی: قابل اندازه گیری  $\rightarrow$  بیوسیت: وزن، قد، طول، میزان آلودگی هوا، معدل
- \* متغیرهای کیفی: قابل اندازه گیری نیست  $\rightarrow$  بیوسیت: تعداد هوس، طبقات ساختمان حتی اگر تیم طبقه هم داشته باشد، درجه
- \* متغیرهای کیفی: قابل اندازه گیری نیست  $\rightarrow$  اسل: گروه خون،  $R_{H+}$ ، رنگ مو، رنگ پوست، نوع آلودگی
- \* اولی ها! : دوسین نام جهت رسیدن به اطلاعات عددی که اندازه گیری، اولین قدم در بررسی جامعه دلا ای، دسته بندی
- \* مهم ترین بخش آمار: محل نمونه گیری که باید به اندازه کافی بزرگ باشد و در جامعه توصیف باشد سرشماره که بجزه.
- \* ادوهای آماری: رابطه بین نتایج دو نمونه گیری تصادفی مناسب است و است. نتایج دو نمونه گیری هرگز دقیقاً مساوی نیست
- \* مطالعه متغیرها: در مطالعات ...
- \* روش تعیین اعداد تصادفی: عدد  $KABIN$  دوم جمل عددها همگی این در تعداد اعضای نمونه ضرب کنیم و افرسی بر این روش و ...

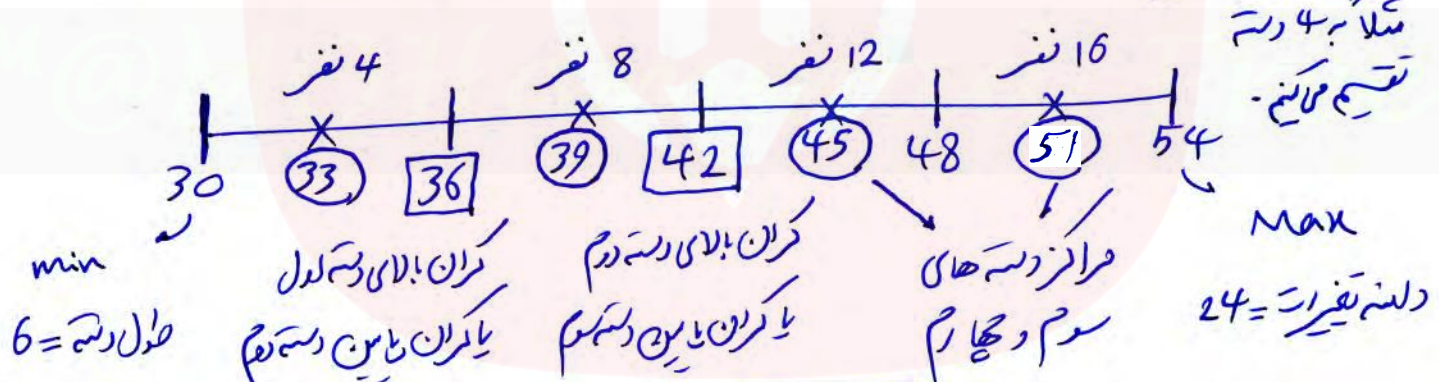


② دسته بندی داده ها و انواع فراداتی و نمودارهای آماری

اولاً برای حل سوالات دسته بندی کنیم. ابتدا نیاز داریم حفظ اشیاء فرودی نداریم. مثلاً هر کدام یک سوال ضرب وضع از دسته بندی داده ها برات حل کنه. بعد طبق فرآیند مشخص و مخرج هر توسط آنگاه ضایعات در هر آن (فصل شده)!! در هر 40٪ رشد مشخص از 30 تا 54 ساله در این طبقه استقال زالی شده. بریم سراغ داده های مربوط به این زیرگروه عزیزمون.

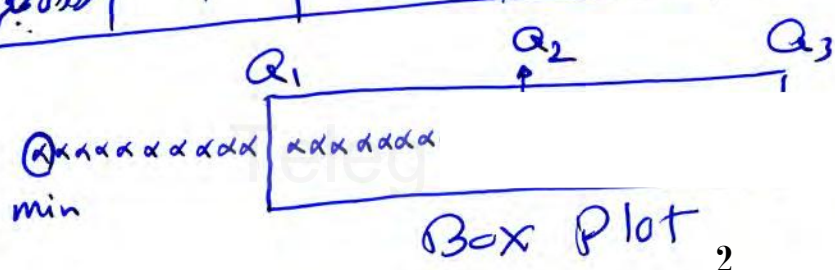
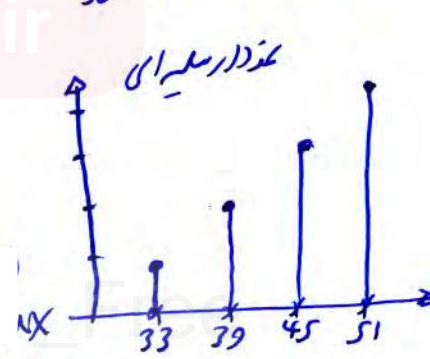
ساله	بر													
3	0	1	2	5	6	7	7	8	8	8	9	9		
4	2	2	2	3	3	4	5	5	5	5	6	6	8	8
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	3	4	4

\* اولین قدم برای بررسی و کار آماری دسته بندی - پس 5 محور می کشیم:



محدوده	30-36	36-42	42-48	48-54
مرکز دسته	33	39	45	51
فرادان مطلق	4	8	12	16
فرادان نسبی	4/40	8/40	12/40	16/40
درصد	1/10	1/20	1/30	1/40
زاویه	36°	72°	108°	144°
فرادان نسبی	4	12	24	40

حالا به جدول فرادان کامل براس تنظیم می کنیم:



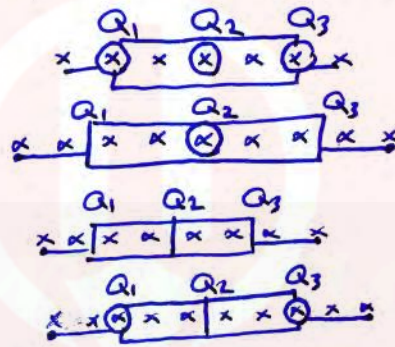
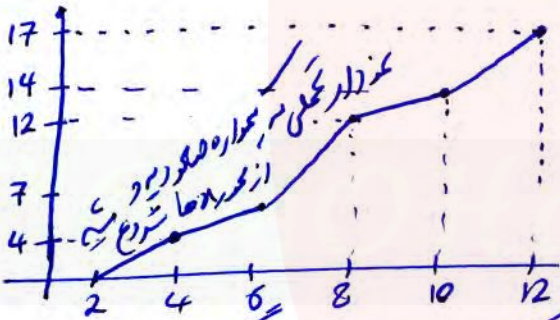
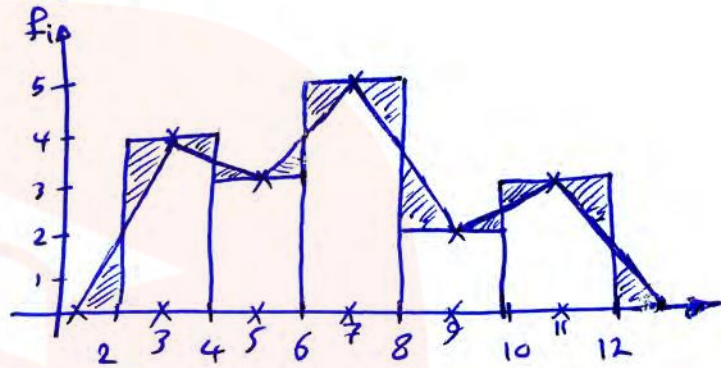


P.3

\* آنه نوک سلیه هارو تو سلیه ای بوسم وصل بینم صید بر فراوانی برت میاد ولی کامل نیست

برای کامل شدن از مرکز دسته اول به اندازه طول دسته بعقب و از مرکز دسته آخر به اندازه طول دسته جلوتر برم و بخندارم  
صید بر سافته رفته . با این تیر بر سطح زیر صید بر دست خطی با هم برابر باشن . یک مثال صید بر

حدود	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12
رتز	3	5	7	9	11
فراوانی	4	3	5	2	3
تجمع	4	7	12	14	17



مقدار فرد : 7  
مقدار زوج : 9  
مقدار زوج : 8  
مقدار فرد : 10

③ شاخص های مرکزی :  
Mean ← میانگین  
Mode ← داده وسطی  
Median ← میانه (زوج میانگین داده وسطی)

1- روش میانگین حدس

برای داده هایی که فراوانی ندارند بهترین راهه . لول یک عدد که تقریباً وسطه حدس می زنیم و به میانگین نزدیکه انتخاب می کنیم . بعد انحرافات از لول عدد رو با هم جمع می کنیم و آخرتقسیم بر تعداد .  
مثلاً فرضاًیم میانگین عمرات بین یکم و ده ساله کنیم :  
12, 15, 16, 18, 18, 19, 19, 19, 20, 20

شاخص می زنیم عدالتش صیده ؟ به 12 دره 7 تا 18, 19, 20 . بین عدالتش بیشتره سخته 18 بهر باشه .

من حدس می زنم 18 ! لول 18 رو می نویسم و بعد لولنه لولنه از 18 کم می کنیم . به اعداد که بهرست میاد

کانون انحراف از میانگین که از میانگین حدس درست باشه جمع لونا حتماً صفر باشه !

$$\begin{array}{r}
 12-18 \\
 15-18 \\
 16-18 \\
 18-18 \\
 19-18 \\
 20-18 \\
 \hline
 18 + \frac{-6-3-2+0}{10}
 \end{array}$$

17.6

در 17 هم حدس می زدیم برافسانه 6.6 می شد و همین عدد بهرست نبود.



2- روش میانگین جدولی

مقدار داده ها فرد و دلال را به موازین می آوریم  
 و آنجا جدول فرکانس به ما داده می شود و حالات وجود دارد  
 مقدار توزیع یا یکی از دو داده وسط کم می شود  
 یا میانگین داده وسط

میانگین 18

	-12	-6	0	6	12
$x_i$	110	116	122	128	134
$f_i$	5	8	15	12	10

	-6	2	2	6
$x_i$	12	16	20	24
$f_i$	1	2	4	3

	-6	-3	0	3
$x_i$	12	15	18	21
$\% P_i$	15	30	25	30

مقدار داده وسط 122 است و به موازین 122

مستون اول را از پایین:  $10 \times 12$  تا  $5 \times 12$

مستون دوم را از پایین:  $12 \times 6$  تا  $8 \times 6$

مستون اول را از بالا:  $3 \times 24$  تا  $4 \times 20$

مستون دوم را از بالا:  $2 \times 16$  تا  $1 \times 12$

$$122 + \frac{60+24}{50} = 122 + \frac{84}{50}$$

$$= 122 + \frac{168}{100} = 122 + 1.68 = 123.68$$

$$\bar{X} = 18 + \frac{12+4}{10}$$

$$\bar{X} = 19.6$$

$$\bar{X} = 17.1 : -6 \times \frac{15}{100} - 0.9$$

3- روش میانگین ساده و برابری

اگر داده ها بر خلاف دوین نمودار ساده و برابری هستند یعنی در دو دسته باشند صورت سوال بر این موضوع است که ما باید  
 یکی از طرفی که تلفت یک - دهگان است. اگر این برای آن اعتباری دادن سال 84 بود. برای آن سبب میانگین تو این  
 حالت یک سطر ساده ها جدولی سبب و برابری می شود:

سال	8	9	10
تعداد	0 0 1 2 2 5 6 7	1 1 2 3 3 4 5 5	1 1 2 2

مثلاً تو نمودار رو بدو 8 تا 8، 8 تا 9، و 4 تا 10 داریم

که در مجموع می شود  $64 + 72 + 40 = 176$ . حالا وسطی که برابری می باشد 5 تا 0.1  
 داریم همیشه  $10.5$ . 5 تا 0.2 داریم از  $11$ . و تا 0.3 داریم  $11.5$ .

0.5 که می شود  $11.5$ . اگر فرض کنیم 0.6 روی 0.7 که می شود  $11.3$  و جمع می شود اعتباری 5.3 که آن  
 این عدد رو با 176

$$\begin{array}{r} 181.3 \\ 180 \\ \hline 130 \\ 120 \end{array}$$



- 4) شخص های براندازی
- 1- دلته تغییرات (R) ← برادر علی خود را چون دم دیده!
  - 2- واریانس (S<sup>2</sup>) ← حوضه دلی در آتشکال دراره!
  - 3- انحراف معیار (S) ← به آتشکال دراره!
  - 4- ضریب تغییرات (CV) ← آتشکال نه دراره!!

$$CV = \frac{s}{\bar{x}}$$

روش تعیین واریانس: میانگین → کلاً هر شخص رو که بخوای لول به  $\bar{x}$  در حساب کنی  
 کلاً لول: میانگین  
 کلاً دوم: دونه در نه داده ها همون میانگین  
 کلاً سوم: به بالا ای کسان مجموع از طرف از میانگین در چون صفره کنه بر اثرش بر توان 2!

کلاً چهارم: تقسیم بر مقدار. اگر فردان داشتیم تبه هو انتر فردانیش و افر تقسیم بر کل!  
 اصطلاحات واریانس: 1- نمونه هم مجبوریم بر توان 2 برودیم بعد با معیار تغییرات کنیم صبرها کنیم که  
 2- تقسیم بر میانگین کنیم ماشه ضریب تغییرات! (S) انحراف معیار

$x_i$	-2	-1	0	1	2
$f_i$	3	2	12	6	1

1, 2, 3, 4, 5

$$s^2 = \frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{5} = 2$$

$$s = \sqrt{2} \rightarrow CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\bar{x} = 10 + \frac{-4 + 4}{24} = 10$$

$$s^2 = \frac{3(8-10)^2 + 2(9-10)^2 + 6(11-10)^2 + 1(12-10)^2}{24} = 1$$

\* در مجموع مربعات یا مجموع مجزورات یا میانگین سافت هاروداد واریانس انجوری محاسبه میشه:

$$s^2 = \frac{\text{مجموع مربعات}}{\text{تعداد}} - (\bar{x})^2 = \text{میانگین سافت}$$

5) اثر تغییرات بر شاخص

هر بلای سیدت داده که بیاد بر شاخص ای درزی هم میار یعنی همه داده که a برابرش با b جمع شدن میانگین و میان و دریم همین شیه ولی در نتیجه! ط جمع بشن  $s^2$  که تغییرات کمینه فقط که a برابرش  $s^2$ ؛  $a^2$  برابرش  $s^2$ ؛  $a$  برابر  $CV$  هم باید بر سرش  
 تغییرات جدید بر تقسیم  $\frac{s'}{\bar{x}}$   $CV_{new}$



P.1

بخش اول: خلاصه حاصل از کل مبحث کامپوزیشن و احتمال  
(مرجع پ.1)

① مفاهیم اولیه لازم از کامپوزیشن

\* فاکتوریل: تعداد حالات که می‌توانیم قرار بدهیم  $n$  شیء متمایز در یک صف، ریف یا لیست مرتب شده  $n!$ .  
 $1! = 1, 2! = 1 \times 2, 3! = 1 \times 2 \times 3, 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4, \dots$

\* ترکیب:  $r$  از  $n$   $\binom{n}{r}$  یعنی انتخاب  $r$  شیء متمایز از بین  $n$  شیء دیگر که چون ترتیب در یک انتخاب کردن هم نیست تعداد ترکیبها بدون تعداد زیر مجموعه است. یعنی وقتی که  $\binom{n}{r}$

یعنی هست یا  $\binom{n}{1}$  یعنی تعداد زیر مجموعه‌های  $n$  عضوی از یک مجموعه  $n$  عضوی که  $n$  عضو و  $n$  عضو و  $n$  عضو

$\binom{n}{n}$  یعنی تعداد زیر مجموعه‌های  $n$  عضوی  $\binom{n}{n}$  و  $\binom{n}{n-1}$  تعداد زیر مجموعه‌های  $n-1$  عضوی و  $\binom{n}{0}$

$\binom{n}{n}$  یعنی تعداد زیر مجموعه‌های  $n$  عضوی  $\binom{n}{n}$  و  $\binom{n}{n-1}$  تعداد زیر مجموعه‌های  $n-1$  عضوی و  $\binom{n}{0}$

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \dots \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}$$

حالات وسط هم بدون  $\binom{n}{2}$  و  $\binom{n}{3}$  و ...

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}, \quad \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \rightarrow \binom{7}{5} = \binom{7}{2}, \quad \binom{10}{7} = \binom{10}{3}, \dots$$

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1} \rightarrow \binom{8}{3} + \binom{8}{4} = \binom{9}{4}$$

کل ترکیبها برای یک مجموعه  $n$  عضوی  $2^n$  است:  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

توانسته‌ام مرتب‌سازی

تذکره: وقتی تعداد زیر مجموعه

انتخاب شده بدون و با را برداری!



P.2

\* اصل ضرب و اصل جمع : این و لادن ← (X)

این یا لادن ← (+)

مثال: بزین 5 تجربه 4، رضی می خوام 3 نفر در انتخاب کنیم / 2 تجربه دیگر رضی:  $(5) \times (4) \times (2)$

ما داریم تو این سائل حد لادن و حد لادن داریم وارد کنیم:  $(5) + (4) \times (2)$

1 ✓ - حد لادن 2 تجربه: یعنی یا دو تجربه دیا 3 تجربه: هر سه تجربه  $(5) \times (4) + (5) \times (2)$

2 ✓ - حد لادن 1 تجربه: یعنی یا یک تجربه و یا هیچی: هر سه رضی  $(5) \times (4) + (4) \times (2)$

3 ✓ - حد لادن یک تجربه: چون حالتهاش ضعیف زیاد باشه از تقسیم تمام لایحه هم  $n(A') = (5) \times (4) \times (3)$

4 ✓ - حد لادن 2 تجربه: چون حالتهاش ضعیف زیاده از تقسیم تمام یعنی هر سه تجربه:  $n(A) = (5) \times (3) = 10$

بین همون نظره در بر تو حالتها 3 و 4 چون ضعیف طولا انباشته از تقسیم رضی و آخرش از کل حالتها کم میکنیم.

\* از نوع جابجایی: تقسیم n شیء متمایز به n حالت ممکن کندهم قرار بدین. حالاده  
رشته یا ارقام یا لغز یا صوفی بخوان کندهم قرار بدین لودها در Box یا یک شیء در نظر  
ما داریم.

\* جابجایی در میون متمایز  
تعداد برابر:  $m = n \Rightarrow m! \times n! \times 2$   
تفاوت:  $m = n + 1 \Rightarrow m! \times n!$

\* با ارقام 5، 4، 3، 2، 1 چند عدد 5 رقمی  $5! = 120$   
همون 5!  
 $\frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$   
همون 10

2 نفر:  $(5) \times 3! = 10 \times 6 = 60$   
3 نفر: 2 نفر یا با 2 نفر! ، 2 نفر یا با 2 نفر! ، 2 نفر یا با 2 نفر!

این در مجموع میشه:  $\frac{122}{3!} = (3)$  ،  $\frac{112}{2!} = (3)$   
 $\frac{3!}{2!} = (3)$



② تعریف احتمال و ایزام فضای نمونه ای

تعداد حالات مطلوب

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

فضای نمونه ای  
یعنی کل نتایج ممکن در یک تیریه تصادفی

- ① تولید ایزام پرتاب سکه و تاس → پایداری
- ② انتخاب ها → ترتیبی
- ③ حالت های کنونی تیم فوتبال پرسپولیس → جایزتی
- ④ سؤال عددی از راه حال مختلف → عددی

۱- فضا های نامبر ای

اولاً بچه می خواد بر نیاید در احتمال پسر بودنش چقدره؟  $\frac{1}{2}$  و دختر بودن؟  $\frac{1}{2}$  . به این همان که

توی جعبه 3 تا کیک داریم دو تا قرضی یکی بولون  $\frac{3}{5}$  و قرض بودن  $\frac{2}{5}$  .

حالا می خوام از این جعبه 2 تا کیک به صورت تصادفی بردارم یا یکی یکی یا ستودنی خارج کنم . احتمال اینکه هر دو کیک  $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$  ؛ هر دو قرض ؛  $\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}$  ؛ یکی کیک قرض ؛  $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$  ؛ یکی قرض و یکی کیک  $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$  ؛ یکی قرض و یکی کیک ؛  $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$  .

از این اعمال با جا بیدار که بود فضا نامبر ای یا فضا نامبر ای می شوند . مثلاً هر دو کیک کاشه ؛  $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$  !

نکته احتمال پسر بودن  $\frac{1}{2}$  و دختر بودن هم همین . اگر ترتیب بچه ها تو خانواده معلوم باشه از همین روش بالا یعنی ضرب کرها که در پی استقانه می کنیم و می آید معلوم میشه مجبوریم بریم سر این فضا نمونه ای . مثلاً ما که دو کیک خانوادگی سر فرزندان با کلام احتمال فرزندان دو پسر و سومی دختر؟! جواب هاشه  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$  چون ترتیب ذکر شده و ما که به دو کیک خانوادگی سر فرزندان با کلام احتمال دو فرزند پسر و یکی دختر هسته مضمون فرقی می کنه . درسته ترتیب ها معلوم نیست پس باید از ترتیب استقانه کنی . دو تا پسر هیه (2) که هاشه 3 حالت . ضرب معلوم کنه لون که هم دختره درسته . پس کاری با هاشه ندریم

هاش 3  $2^3 = 8$  . مجاز فرزند پسر یا دختر ؛

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2}}{2^3} = \frac{3}{8}$$



P.4

نکته ضمیمه 1: کلاً تو اصمالت ار در مورد موضوع صحتی نذر یعنی انکار اتفاقی نیافتا ده مثلاً اگر تو جعبه 4 تا کیک و 3 تا قرز داشته باشی اصمالت این بودن هاشم  $\frac{4}{7}$  . حال اگر بدون اینکه دیده باشی 5 تا کیک و 2 جعبه خارج کنی باز هم اصمالت اینجاش هستی این هاشم چون  $\frac{4}{7}$  هاشم .

نکته ضمیمه 2: الان بگردن گفتیم که گفت یی یی یی یی یا ایس در پی یا استوالی از ضرب که ها استکان می کنیم و کما که به موقع نکرده اید بر دانه که زیاد بود و ترتیب هم ذکر شده بود ما تو نم فرض کنیم که ما هم خارج شدن و از ترتیب استکان کنیم .

سوال 1: در زمانیکه 6 مرش سالم و 4 دیبته داریم . سه مرش بطور استوالی خارج می کنیم . باندام استمال

(الف) هر سه سالم  
(ب) در سالم یک دیبته

(ج) لول در دو سالم و سه دیبته

$$\frac{\binom{6}{2} \binom{4}{1}}{\binom{10}{3}}$$

$$\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8}$$

$$\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8}$$

سوال 2: در یک خانواده 4 فرزند با بدم استمال؟

(الف) سه فرزند پسر

(ب) فقط 3 فرزند لول پسر

(الف) 3 فرزند لول پسر

$$\frac{\binom{4}{3}}{2^4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

سوال 3: در یک تاب و سکه با بدم استمال

(الف) دو رو

(الف) صد تکل دو رو

(الف) دو رو

\* همیشه به متوجه صد تکل که می تونه یعنی

$$\frac{\binom{3}{2} + \binom{3}{3}}{2^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\binom{3}{2}}{2^3} = \frac{3}{8}$$

$$P(A) = \frac{\binom{3}{0}}{2^3} = \frac{1}{8} \Rightarrow P(A) = \frac{7}{8}$$

سوال 4: سکه ای را که اندر ترتیب می کنیم تا چهارمین رو ظاهر شود . با بدم استمال در 4 مرتبه بر این نتیجه می رسم؟

یعنی در 4 مرتبه لول یا 3 بار رو و 1 بار پسر یا در 4 مرتبه هفتم به چهارمین رو

$$\frac{\binom{6}{3}}{2^6} \times \binom{1}{2}$$



## 2- فضاهای ترکیبی

هر وقت بحث انتخاب کردن بین لذت‌های مادی؛ مطرح بود ترکیب که همه ذکر شده بود تو فرج کسر احتمال می‌دادی سرخ ترکیب .

سوال 1: در ظرف 5 مهره به شماره‌های 1 تا 5 داریم. دو مهره با هم بیرون می‌آوریم با کدام احتمال؟

الف) مجموع زوج	ب) مجموع فرد	ج) مجموع کمتر از 5
$\frac{\binom{2}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}$	$\frac{\binom{2}{1} \times \binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}$	$\frac{2}{\binom{5}{2}} = \frac{2}{10}$

دسته‌های مجبوریم حتماً دو داشته‌ها بگیریم:

تذکره: مجموع سه عدد  $\left\{ \begin{array}{l} \text{دو مهره سرخ و یک مهره سفید} \\ \text{دو مهره سفید و یک مهره سرخ} \end{array} \right\}$  یا دو تا فرد و یک زوج  $\rightarrow$  جمع زوج  
 یا دو مهره سفید یا یک فرد و دو زوج  $\rightarrow$  جمع فرد

## 3- فضاهای جایگشتی

در مسائل طعم سازی و عدد سازی این حالت‌ها بسیار رایج است و بحث کنار هم قرار گرفتن بسیار مهمه. اگر تو تعداد از این قسمت سوال بیاریم حتماً جایگشت با هم در هم داریم.

تذکره: اگر 4 پسر و 3 دختر داشته باشیم  $\rightarrow$  هیچ در پسر که با هم نباشند:  $4! \times 3!$   
 یا 4!  $\times$  3!  $\times$   $\binom{5}{3}$   $\rightarrow$  هیچ دو دختری کنار هم نباشند: 0 b 0 b 0 b 0 b 0

## 4- فضاهای عددی

در مسائل عدد سازی بحث مفروضه‌ها مهمه که اگر عضو بیشتر جامعه بود لازمه حالت‌های شامل صفر رو جدا کنیم. مثلاً در زوج بودن و گسسته بودن اگر 5 صفت داشته باشیم می‌توانیم به سه حالتی زوج بودن از 1 تا 5 در بین روی سه نفر.

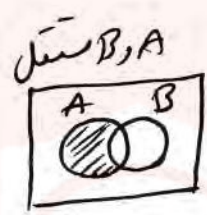


③ اعمال بریت‌ها و بریت‌های مستقل

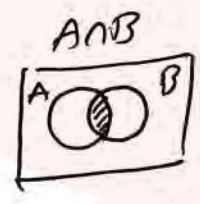
اول از همه باید بدوین بریت‌ها مستقل تعریف کنیم این به این ربطی که هر یک از اینها را به تنهایی یا با هم در دو رویداد که همزمان رخ می‌دهند.

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

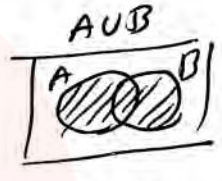
$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$   
 $= P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B))$   
 $= P(A) \cdot P(B')$



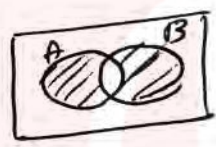
$P(A - B)$



$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



$(A - B) \cup (B - A)$   
 or  
 $P(A \cup B) - P(A \cap B)$



$P(A \cap B) = 0$  ← نیاز به ←

نکته مهم: نحوه تشخیص استقلال بریت‌ها یا با توجه به هر یک از بریت‌ها از صورت مسئله یا با محاسبه  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$    
 توابع، بریت‌ها، برداشت‌های مستقل و با ربطی به مستقل از نگاه رویداد غیر از صورت مسئله این موضوع را تشخیص دارد. مثل مثال زیر:   
 مثال: دو تاس را با هم بریت‌ها کنیم. بریت‌ها A, B, C را تعریف می‌کنیم:

$A =$  عدد تاس اول 4,  $B =$  عدد تاس اول 5,  $C =$  مجموع تاس‌ها 7   
 $\{(4,1), \dots, (4,6)\}$   $\{(5,1), \dots, (5,6)\}$   $\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$    
 $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$   $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$   $P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow$  نیاز به  $A, B$  مستقل  $A, C$    
 $A \cap C = \{(4,3)\} \rightarrow P(A \cap C) = \frac{1}{36} = P(A) \times P(C) \Rightarrow$  مستقل  $B, C$    
 $B \cap C = \{(5,2)\} \rightarrow P(B \cap C) = \frac{1}{36} = P(B) \times P(C) \Rightarrow$  مستقل  $A, C$

حالات بریت‌ها در تفریق مجموع تاس‌ها 11, 11, 11   
 $\{(5,6), (6,5)\} \rightarrow P(D) = \frac{2}{36}$    
 $P(A \cap D) = 0, P(B \cap D) = \frac{1}{36} \rightarrow B \cap D = \{(5,6)\}$



@MOHAMMAD.FREE

شرایط استقاره / یا مدد مستقل باش  
 (2) جاشدن معلم باش

\* فرشتهین اسماعیلی فوت عزیزم در بزمین بازمین تیم فوتبال استقلال از هر 5 شوتی که در فاصله 30 متری دروازه پرسپولیس به سمت دروازه شکیبایمانه 4 تا شوت می‌کشد (ت)

پس احتمال پیروزی دارانش فرشته  $\frac{4}{5}$  یا  $\frac{8}{10}$  یا 80 درصد. حالا فراره 3 تا شوت بزنه

الف) هر سه گل شوت ب) اولی گل اول گل شوت ج) فقط دو تا گل اول گل شوت د) در شوت گل شوت

$\frac{8}{10} \times \frac{8}{10} \times \frac{8}{10}$   $\frac{8}{10} \times \frac{8}{10}$   $\frac{8}{10} \times \frac{8}{10} \times \frac{2}{10}$   $\left(\frac{2}{10}\right)^2 \left(\frac{8}{10}\right)$

و حالا سوال مهم: دانش علی آنگاه که منصور بیان به فرشته سر تا فرشته فرشته می‌ده تا به گل بزنه

$$P(A) = \frac{8}{10} + \frac{2}{10} \times \frac{8}{10} + \frac{2}{10} \times \frac{2}{10} \times \frac{8}{10}$$

\* محتر بود به جای این کارا از تقسیم می‌زنیم در احتمال گل شدن هیچکدوم از تریه هار دیگه به دوازده یک که می‌زنیم:

$$P(A') = \frac{2}{10} \times \frac{2}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{8}{1000} \Rightarrow P(A) = 0.992$$

مثال: آنگاه یان روحانی، مجانیری، هاشمی طباطبائی، میر سلیم، رئیس و قالیباز کاندیداهای دوازدهمین دوره انتخابات ریاست جمهوری در کشور عزیزمون هستن. با کلام (مهمال) ...

ج) هیچ دروغی در یک ماه سولد زده باشه.

$$\frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12} \times \frac{8}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{P(12,6)}{12^6} = \frac{P(11,5)}{12^5}$$

الف) همه تریه ب) همه در یک ماه

$$\left(\frac{1}{12}\right)^6 = \left(\frac{1}{12}\right)^5$$

$$\left(\frac{1}{12}\right)^6 + \dots + \left(\frac{1}{12}\right)^6$$

استقلال

$$\frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \dots \times \frac{1}{12}$$

هر وقت از آخر به سمت اول می‌زنیم و به هر شماره:  $6 \times 5 \times 4 = P(6,3)$



④ مسائل تانس و احتمال شرطی و متغیر تصادفی

پرتاب دو تاس از هم جداگانه. فضای نمونه این  $6^2 = 36$  است. تا منابع بگردد: حاصلضرب

① جدول حاصلضرب

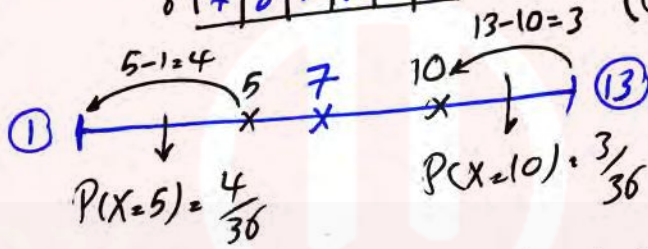
	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

② سطر بر جدول مجموع

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

③ سطر بردنهای نمونه ای

- $(1,1), (1,2), \dots, (1,6)$
- $(2,1), \dots, (2,6)$
- $(3,1), \dots, (3,6)$
- $(4,1), \dots, (4,6)$
- $(5,1), \dots, (5,6)$
- $(6,1), \dots, (6,6)$



اگر  $X$  رو تعریف کنیم  
مجموع رو تانس داریم:

به این تانس جدول  
توزیع احتمال که جمع احتمالات  
ممکنه میشه!

$X$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

مسئله: با کدام احتمال حاصلضرب دو تانس  
بزرگتر از 5 است؟  
در 5 تانس و 5 تانس 5 بزرگتر از 5 است.  
در 3 تانس و 6 تانس 3 بزرگتر از 5 است:  $24 - 4 = 20$

احتمال شرطی

بدون درس قبلیه! با این تفاوت که فضای نمونه ای تغییر نمائیم. به عنوان مثال در همین  
پرتاب دو تانس احتمال داره سوال شرطی مطرح بشه به این شکل:

مسئله ①: دو تانس را با هم پرتاب می کنیم. اگر مجموع 7 باشد با کدام احتمال یکی از آنها 5 است؟

و در صورت سوال هر دو مجموع 7 یعنی داریم:  $\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$   
این جواب میشه  $\frac{2}{6}$  یا  $\frac{1}{3}$ .

مسئله ②: در یک خانواده 4 فرزند فرزند اول پسر است. با کدام احتمال این خانواده دارای 3  
دختر است؟ و احتمال  
که احتمال هر سه پسر همیشه  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$



P.9

سوال 3: در یک خانواده 4 فرزند یکی از فرزندان پسر است. بابت ام احتمال این خانواده

در راه 3 دختر است؟ اینجادر چه هیچ نکرده. فقط فضای نمونه ای 4 فرزند از 16 حالت  
 به 15 حالت تقلیل پیدا کنه چون حالت هر 4 فرزند حذف مرسته.

$$S_{\text{new}} = \{ (bbbb), (bbbg), (bbgg), (bggg) \}$$

$$P(A) = \frac{4}{15}$$

$$\binom{4}{3} = 4$$

تذکره: البته احتمال شرطی که در بعضی دایره که از صورت سوال برابری بین پسران دارد  
 دارد بود باید ارزش استفا کنیم در غیر این صورت نیازی به این کار نیست

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$A, B$  متعلق  $\Rightarrow P(A|B) = P(A)$   
 $A, B$  نامتعلق  $\Rightarrow P(A|B) = 0$

5 احتمال کل

یعنی احتمال تولد به احتمال پسر - بچه که حواد همین بیاید. سرع کاس یا پسر یا دختر. بپرندوم است  
 1/2. حاله که اگر پسر باشه احتمال بیمار بودنش 30% درگه دختر باشه 10%. بپرندوم احتمال

این بچه ساله؟! شما کاس یا پسر سالم و یا دختر سالم

$$\frac{1}{2} \times \frac{70}{100} = 0.35$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{90}{100} = 0.45$$



سوال مهم: دو صعبه داریم

مدل اول: از هر صعبه مهره ای خارج می کنیم. بپرندوم احتمال A: اگر در B: فرز؟  $\frac{7}{10} \times \frac{2}{5} = \frac{28}{100}$

مدل دوم: از هر صعبه مهره ای خارج می کنیم. بپرندوم احتمال A: اگر در B: فرز؟  $\frac{7}{10} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{10} \times \frac{3}{5} = \frac{46}{100}$

$$\frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} \times \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}$$

مدل سوم: از هر صعبه 2 مهره خارج می کنیم. بپرندوم  
 احتمال درآوردن دو مهره از A



P.10

حل چهارم: یکی از جعبه‌ها را به تعداد انتخاب و مهره‌های خارج کنیم. با کدام احتمال این؟

$$A \searrow \frac{1}{2} \times \frac{7}{10} = \frac{7}{20} \quad \oplus \Rightarrow \frac{13}{20} = 0.65$$

$$B \swarrow \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10} = \frac{6}{20}$$

حل پنجم: یکی از جعبه‌ها را به تعداد انتخاب کرده و مهره‌های انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو این؟

\* تذکر: این سه تا جعبه بود  
برگردم یک یک کارت  
و در احتمال خودش ضرب شد!

$$A \searrow \frac{1}{2} \times \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \dots$$

$$B \swarrow \frac{1}{2} \times \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \dots$$

جمع کنیم

حل ششم: یک مهره از A خارج و به B می‌انازیم. حال از B مهره‌ای خارج می‌کنیم. با کدام احتمال این؟

$$A \text{ مهره از } A \rightarrow B_{\text{new}} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \frac{4}{6} = \frac{28}{60}$$

$$A \text{ مهره از } A \rightarrow B_{\text{new}} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \times \frac{3}{6} = \frac{9}{60}$$

$$\oplus \Rightarrow \frac{37}{60}$$

حل هفتم: در مهره از A، یک مهره از B به داخل ظرف C انقضاست و سپس مهره‌ها از C خارج می‌کنیم. احتمال این چقدر است؟

روش اول:

$$A \text{ از } C: \frac{2}{3} \times \frac{7}{10} = \frac{14}{30}$$

$$B \text{ از } C: \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{30}$$

$$\oplus \Rightarrow \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

از بیخون اول هم می‌تونستیم دو ظرف را بر کاس کنیم که میشه 10 تا کاس که 5 تا ظرف یعنی 5 تا مهره که چون 10 تا کاس کبیه احتمال این چقدر است؟  $\frac{10}{15}$  بدون  $\frac{2}{3}$  میشه!

6 توزیع در جعبه‌ها

می‌خوام در مورد حالت «د» تمشاک قرشید بهات صحبت کنم. جایزه پرسیم با کدام احتمال رو باش گل داشته؟! سوال مطرح شده تو ذهن تو اینست که کدام 2 تا؟! جوابش:

2 تا از 3 تا یعنی  $\frac{1}{2}$  در کل شدن یک بار  $\frac{1}{9} > \frac{1}{9}$  بیشتر  $P =$  بیشتر



P.11

سوال 1: 140 عدل یکن گنده  $R_H$  فن سته از . با کدام احتمال در یک خانواده 3 فرزند

$$P_{RH^-} = \text{مادر سق} \times \text{پدر سق} = 140 \times 140 = 16 \Rightarrow P_{RH^+} = 184$$

الف) 2 فرزند اول سق - فقط دو فرزند اول سق

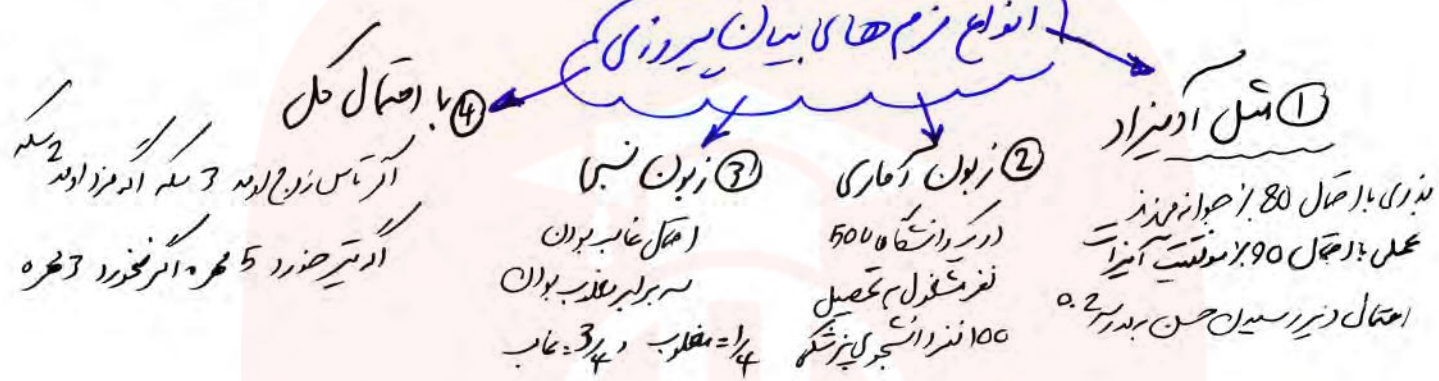
$$\frac{16}{100} \times \frac{16}{100}$$

$$\frac{16}{100} \times \frac{16}{100} \times \frac{84}{100}$$

ب) دو فرزند سق - کدام دریا

$$\binom{3}{2} \left(\frac{16}{100}\right)^2 \left(\frac{84}{100}\right)$$

انواع زخم های بیان میروزی



سوال 2: از جعبه ای شامل 7 مهره یکی در فرزند بطور سقوالی 5 مهره خارج کنیم .

با کدام احتمال - الف) 3 تاش آبی؟! - اولاً این دو تا فرقی ندارند . ثانیا چون گفته سقوالی یعنی بدون جایگزینی از این دو مهر برداشت و قضا که از آنجا تعیین می کنند و توزیع در جمله ای است . و لا حول و لا قوة الا بالله ذکر شده می دانیم فرض کنیم که با هم خارج می کشیم

$$\frac{\binom{7}{3} \binom{2}{2}}{\binom{9}{5}}$$

ج) اگر این آزمائش را با جایگزینی انجام دهیم با کدام احتمال 3 مهره یکی خارج می شود؟

تو این حالت چون آزمائش با جایگزینی و هر دفعه مهره خارج شده هم جعبه بر می گرداند شرایط آزمائش در هر برداشت می باشد و ما تو نیم از سقوالی است سقوالی یعنی تو این مشکل میروزی یعنی آبی بودن  $\frac{7}{9}$  و سقالت یعنی فرزند بودن  $\frac{2}{9}$ !

تعداد آزمائش 5 باره (چون 5 مهره خارج می کشیم) و انتظار داریم یعنی 3 بار

$$\binom{2}{9}^3 \binom{7}{9} \binom{5}{9} = \binom{2}{9}^3 \binom{7}{9} \binom{5}{9}$$