

# فصل دوم

## توابع

- ❖ درس اول: توابع ثابت، چندضابطه ای، همبانی
- ❖ درس دوم: توابع پیکانی و قدر مطلق
- ❖ درس سوم: اعمال بر روی توابع ۲

شماره ادی	نوبت دوم	نوبت اول
۸	۸	۷ (تا ص ۴۴)

بارم فصل ۲:

## فصل ۲ درس ۱: توابع ثابت، چندضابطه ای، همانی

### اهداف درس ۱:

- یادآوری مفاهیم تابع، دامنه و برد و روش های مختلف نمایش تابع؛
- معرفی تابع های ثابت، چند ضابطه ای و همانی و شناخت آنها در مسائل واقعی؛
- تأثیر و توجه به دامنه تابع در رسم نمودار تابع؛
- تشخیص متغیر مستقل و وابسته در هر مسئله با توجه به واحد های معرفی شده برای محورهای مختصات؛
- مهارت مدل سازی مسائل واقعی به کمک تابع و مهارت تحلیل نمودار یک تابع با مسائل واقعی؛
- آشنایی با روش: «حل مسئله»
- ارتباط و کاربرد شاخه های گوناگون دانش ریاضی با یکدیگر، مانند ارتباط آمار و تابع .

### یادآوری مفاهیم تابع، دامنه و برد و روش های مختلف نمایش تابع؛

**تعریف تابع:** یک رابطه هنگامی تابع است که بتوانیم به هر عضو از مجموعه A (متغیر مستقل) دقیقاً یک عضو از B (متغیر وابسته) را نسبت دهیم.

### نمایش های مختلف تابع: (گاردور گلاسی هی ۲۳)

(۱) نمایش جدولی: نمایش جدولی یک رابطه، وقتی تابع است که اعداد سطر اول برابر نباشند یا اگر برابر بودند اعداد ردیف پایین مربوط به آن هم برابر باشند

(۲) نمایش پیکانی: نمایش پیکانی یک رابطه، وقتی تابع است که از هر عضو مجموعه اول دقیقاً یک پیکان خارج شود

(۳) نمایش زوج مرتبی: نمایش زوج مرتبی یک رابطه، وقتی تابع است که مولفه های اول برابر نباشد و اگر برابر بود، مولفه های دوم آن هم برابر باشد.

(۴) نمایش مختصاتی: نمایش مختصاتی یک رابطه، وقتی تابع است که هر خط عمودی (موازی محور عرض ها)، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

(۵) نمایش توصیفی

**دامنه و بُرد تابع:** در هر تابع، همه مقاداری که متغیر مستقل می تواند بگیرد را دامنه و همه مقاداری که متغیر وابسته می تواند بگیرد را برد می گوئیم.

دامنه تابع  $f$  را با  $D_f$  و بُرد آن را با  $R_f$  نشان می دهیم.

(۶) ضابطه جبری تابع: رابطه بین دامنه و برد تابع  $f$  را می توان به

صورت یک عبارت ریاضی  $y = f(x)$  نمایش داد این گونه نمایش تابع را، نمایش جبری یا قانون یا ضابطه تابع می گوئیم. برای نمایش تابع  $f$  از مجموعه A به مجموعه B می نویسیم:

$$f : A \rightarrow B$$

$$y = f(x)$$

A دامنه تابع f است

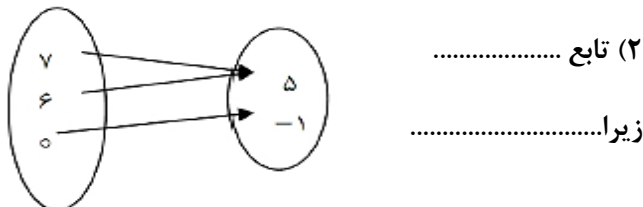
یک تابع با ضابطه و دامنه آن مشخص می شود، اگر دامنه تابع ذکر نشود، بزرگترین دامنه ممکن را برای آن تابع در نظر می گیریم.

مثال:

کدام یک از روابط تعریف شده ی زیر تابع می باشد؟

(۱) تابع .....  
 زیر:.....

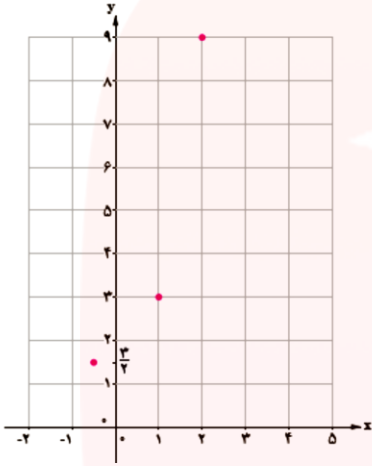
$x$	۳	۲	-۱	۴
$y$	-۱	۷	$\sqrt{۴}$	۷



ب) نمایش زوج مرتبی:

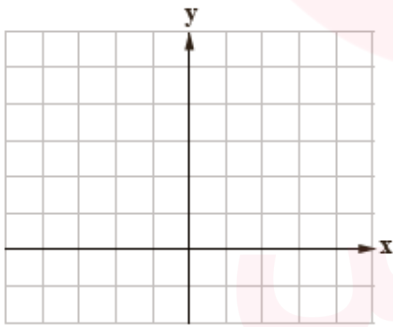
$$f = \left\{ \left( -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right), (1, 3), (2, 9) \right\}$$

ج) نمایش مختصاتی:

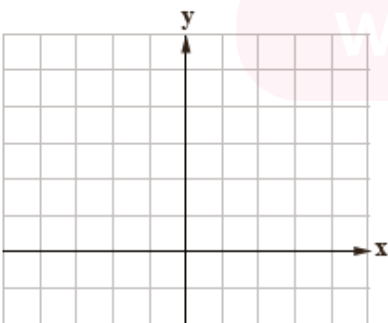


② کامل کنید:

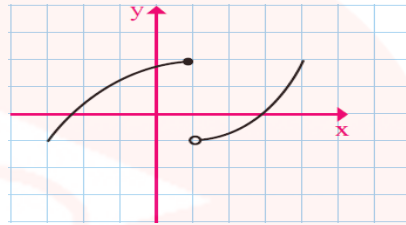
$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = x^2 - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} D_f = A = \{2, -1, -2\} \\ R_f = \{ \} \end{cases}$$



$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = \end{cases} \quad \begin{cases} D_f = \left\{ -\frac{1}{2}, 0, 2 \right\} \\ R_f = \left\{ -\frac{3}{2}, 0, 6 \right\} \end{cases}$$



۳) تابع .....  
 $f = \{(2, 1), (3, 1), (5, 7)\}$   
 زیرا.....



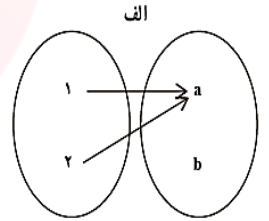
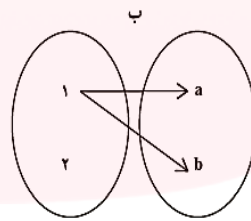
۴) تابع .....  
 زیرا.....

۵) رابطه ی که به هر شخص ، شماره ملی او را نسبت می دهد.

تابع ..... زیرا.....

(تمرین ۱ و آهی ۲۴)

① کدام یک از رابطه های زیر که با نمودار پیکانی نمایش داده شده اند، تابع نیست؟ چرا؟



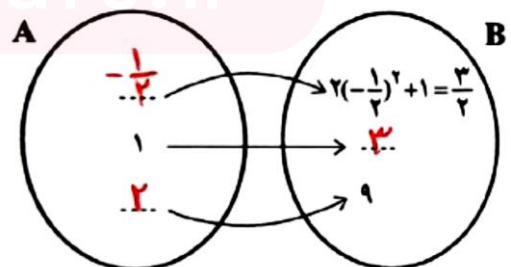
(فعالیت ص ۲۲)

اگر  $A = \{-\frac{1}{2}, 1, 2\}$  و  $f: A \rightarrow B$  باشد در این

صورت این تابع را به صورت پیکانی، زوج مرتبی و مختصاتی نمایش دهید.

☑ حل:

الف) نمایش پیکانی:



۱) در نمایش جبری، به صورت  $f(x) = c$  می باشد. مثل:

$$f(x) = 5$$

(تقریباً ۲ ص ۳۲)

② (ج) آیا گزاره " اگر  $f$  یک تابع ثابت باشد، آنگاه

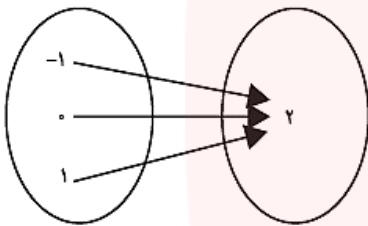
$$f(kx) = kf(x)$$

درست است؟

$$f(x) = c \rightarrow f(kx) = c$$

✓ حل: خیر زیرا:

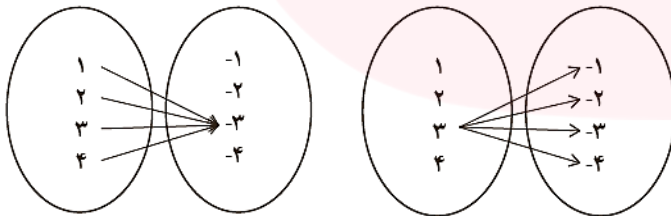
② در نمایش پیکانی، همه پیکانها به یک عضو از مجموعه دوم وارد می شوند. مثل:



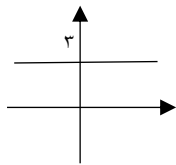
(تقریباً ۵ ص ۳۲)

⑤ کدام یک از نمایش های پیکانی زیر یک تابع ثابت را

معرفی می کند؟



③ در نمایش مختصاتی، نمودار تابع، خطی افقی و موازی محور x ها (یا قسمتی از آن) است.



مثل:

④ در نمایش زوج مرتبی، مؤلفه های دوم برابر می باشند. مثل:

$$f = \left\{ (1, 2), (0, 2), (-3, 2) \right\}$$

(تقریباً ۳ و ۴ و ۹ ص ۳۲)

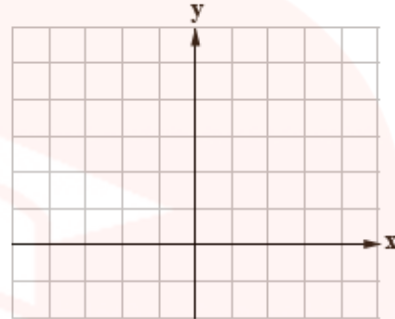
③ اگر  $f = \{(2, b), (a, 4), (7, a+b)\}$  یک تابع ثابت

باشد مقدار  $a$  را حساب کنید

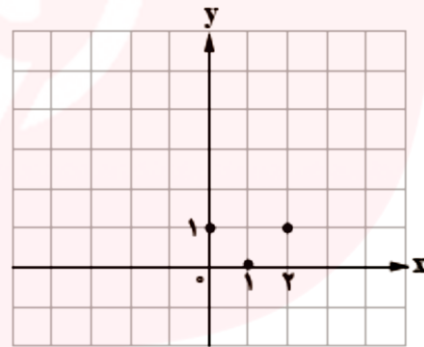
✓ حل:  $f$  تابع ثابت است پس باید مؤلفه های دوم برابر باشند:

$$b = 4, a + b = 4 \rightarrow a = 0$$

$$\begin{cases} f : A \rightarrow B & D_f = \{ \quad \} \\ f(x) = \frac{1}{x} & R_f = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5} \right\} \end{cases}$$



$$\begin{cases} f : A \rightarrow B & D_f = \{ \quad \} \\ f(x) = (x-1)^2 & R_f = \{ \quad \} \end{cases}$$



### انواع توابع:

- ① چند جمله ای
  - ② ثابت
  - ③ چند ضابطه ای
  - ④ همانی
  - ⑤ پله ای
  - ⑥ علامت
  - ⑦ جزء صحیح
  - ⑧ قدر مطلق
- با توابع چند جمله ای (درجه ۱ و ۲) در سال دهم آشنا شده اید.

### توابع ثابت:

تابعی مانند  $f$  را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می نامیم.

✓ نکته: دامنه تابع ثابت  $R$  و برد آن مجموعه تک عضوی  $\{c\}$  می باشد ( $c \in R$ )

## توابع چند ضابطه‌ای (چند قطعه‌ای):

توابعی که در بخش‌های مختلف دامنه، ضابطه‌های مختلف دارند، توابع چند ضابطه‌ای نامیده می‌شوند. مثل:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases} \quad \text{الف) تابع دو ضابطه‌ای}$$

$$g(x) = \begin{cases} -2x+3 & x > 2 \\ 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ x & x < 0 \end{cases} \quad \text{ب) تابع سه ضابطه‌ای}$$

✓ نکته: رابطه چند ضابطه‌ای زمانی تابع هستند که دامنه‌های آن‌ها اشتراک نداشته باشد. اما اگر دامنه‌ها اشتراک داشته باشند، مقدار  $y$  آن‌ها در نقاط اشتراک، یکسان باشد.

نکته ۲: برای به دست آوردن مقادیر تابع، به دامنه ( $x$ ) های هر ضابطه توجه می‌کنیم.

(تمرین ۱۱ ص ۳۳)

$$\text{حاصل } f(x) = \begin{cases} x & x < -1 \\ x^2 & -1 \leq x \leq 2 \\ 5 & x > 2 \end{cases} \quad \text{(۱۱) در تابع}$$

عبارت‌های خواسته شده را بیابید.

$$۱) f(2) \xrightarrow{f(x)=x^2} 2^2 = 4 \quad \text{حل:}$$

$$۲) f(3) + f(-1) \rightarrow 5 + 1 = 6$$

$$f(3) \xrightarrow{f(x)=5} 5$$

$$f(-1) \xrightarrow{f(x)=x^2} (-1)^2 = 1$$

$$۳) f(-\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) = -\sqrt{2} + 3$$

$$f(-\sqrt{2}) \xrightarrow{f(x)=x} -\sqrt{2}$$

$$f(\sqrt{3}) \xrightarrow{f(x)=x^2} (\sqrt{3})^2 = 3$$

④ اگر  $A = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$  یک تابع

ثابت باشد، میانگین، میانه و واریانس مقادیر  $y_1, y_2, y_3$  را به دست آورید.

⑥ در تابع ثابت  $f(x) = c$ :

الف) مقادیر  $f(a), f(b), f(a+b)$  را مشخص کنید

ب) اگر در این تابع  $f(a+b) = f(a) \times f(b)$  باشد

$c$  چه مقادیری را اختیار می‌کند؟

⑨ اگر  $f$  یک تابع ثابت با دامنه‌ی دو عضوی و  $m, n \in N$  باشد، مقدار  $m+t$  را به دست آورید.

$$f = \{(-1, n^2 - 2n), (m-4, 3), (m+n, t)\}$$

✓ حل:  $f$  تابع ثابت است پس باید مولفه‌های دوم برابر باشند:

$$t = 3$$

$$n^2 - 2n = 3 \rightarrow n^2 - 2n - 3 = 0 \rightarrow$$

$$(n-3)(n+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} n = 3 \\ n = -1 \notin N \times \end{cases}$$

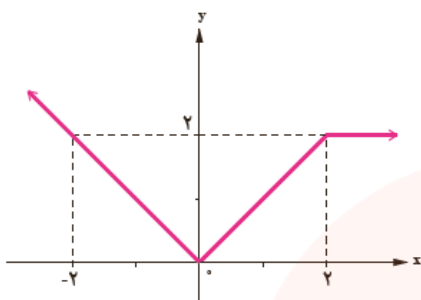
$$n = 3, t = 3 \rightarrow$$

$$f = \{(-1, 3), (m-4, 3), (m+3, 3)\}$$

چون دامنه دو عضوی است، پس دو زوج مرتب باهم برابرند.

$$\begin{cases} m+3 = -1 \rightarrow m = -4 \notin N \times \\ m-4 = -1 \rightarrow m = 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow m+t = 3+3 = 6$$



(تمرین ۱۰ ص ۳۲)

ضابطه تابع را

مشخص کنید.

$$۴) f(\sqrt{۲}) + f(۵) = ۲ + ۵ = ۷$$

$$f(\sqrt{۲}) \xrightarrow{f(x)=x^۲} (\sqrt{۲})^۲ = ۲$$

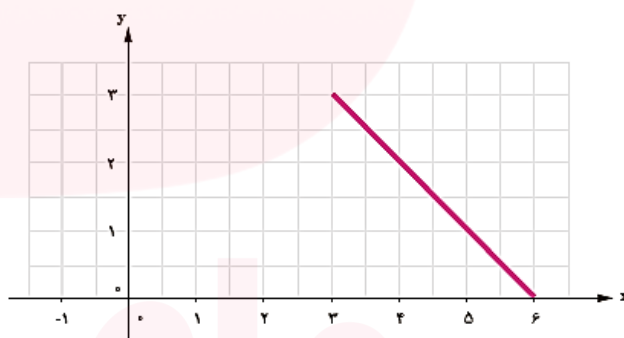
$$f(۵) \xrightarrow{f(x)=۵} ۵$$

نکته ۳: برای رسم نمودار تابع چند ضابطه ای، نمودار هر کدام از ضابطه ها را با توجه به محدوده ای که ضابطه آن تعریف شده است، رسم می کنیم.

(گاردوگرگلابی ص ۲۹)

ضابطه تابع و نمودار آن را کامل کنید:

$$f(x) = \begin{cases} x+۱ & -۱ \leq x < ۳ \\ \dots\dots\dots & ۳ \leq x \leq ۶ \end{cases}$$

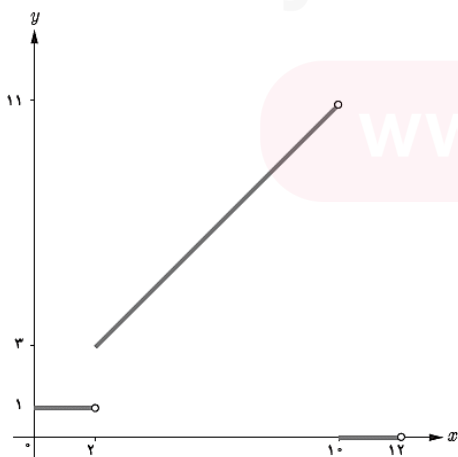


(تمرین ۱۳ ص ۳۳)

تابع زیر را رسم کنید.

$$C(x) = \begin{cases} ۱ & ۰ \leq x < ۲ \\ x+۱ & ۲ \leq x < ۱۰ \\ ۰ & ۱۰ \leq x \leq ۱۲ \end{cases}$$

حل:





## تابع‌های:

اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنه تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می‌نامند.

✓ نکته: دامنه و برد تابع همانی  $R$  می‌باشد

(تقریباً ۲ ص ۳۲)

② الف) آیا گزاره "اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند آن تابع همانی است" درست است.

✓ حل: خیر. مثلاً تابع زیر با اینکه دامنه و برد برابر است ولی همانی نیست.

$$D = R = \{1, 2\}$$

$$f = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

۱) در نمایش جبری، به صورت  $f(x) = x$  می‌باشد. مثل:

$$f(-1) = -1$$

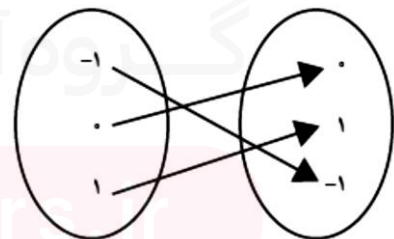
(تقریباً ۲ ص ۳۲)

ب) آیا گزاره "اگر دامنه‌ی یک تابع همانی، مجموعه اعداد حقیقی باشد. آنگاه حاصل  $f(x) + f(-x)$  برابر صفر است" درست است؟

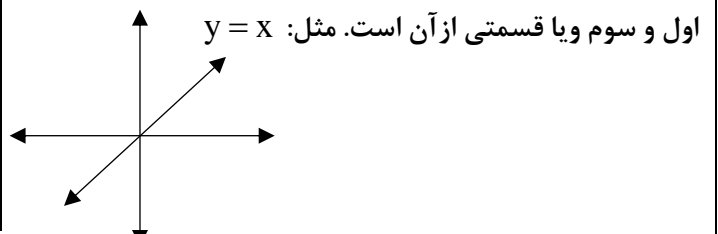
✓ حل: درست. زیرا:

$$\begin{cases} f(x) = x \\ f(-x) = -x \end{cases} \rightarrow f(x) + f(-x) = x + (-x) = 0$$

۲) در نمایش پیکانی، اعداد سروته پیکان با هم برابرند. مثل:



۳) در نمایش مختصاتی، نمودار تابع، نمودار تابع، نیمساز ربع



(تقریباً ۸ ص ۳۲)

⑧ الف) در زوج مرتب  $(2, n^2 - 3n + 4)$  مقدار  $n \in \mathbb{N}$  را

طوری بیابید که این زوج مرتب روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشد

✓ حل:

$$n^2 - 3n + 4 = 2 \Rightarrow n^2 - 3n + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$(n - 2)(n - 1) = 0 \rightarrow n = 2, n = 1$$

ب) در زوج مرتب  $(-1, n^2 - 4n + 2)$  مقدار  $n \in \mathbb{N}$  را

طوری بیابید که این زوج مرتب روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشد

۴) در نمایش زوج مرتبی، مولفه اول، هر زوج مرتب یکسان

است. مثل:  $f = \{(1, 1), (0, 0), (-3, -3)\}$

(تقریباً ۷ ص ۳۲)

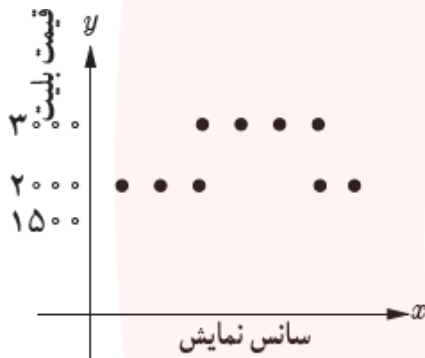
⑦ اگر  $A = \{(a, 1), (b, 2), (c, 5)\}$  یک تابع همانی

باشد، میانگین  $a, b, c$  را بیابید.

(د) بلیط یک سینما در ۳ سانس اول ۲۰۰۰ تومان و در ۴ سانس بعدی ۳۰۰۰ تومان و در دو سانس آخر ۱۵۰۰ تومان است.  
 حل:

تابع چندضابطه‌ای

$$f(x) = \begin{cases} 2000 & x = 1, 2, 3 \\ 3000 & x = 4, 5, 6, 7 \\ 1500 & x = 8, 9 \end{cases}$$



(تقریبی اهی) (۳۱)

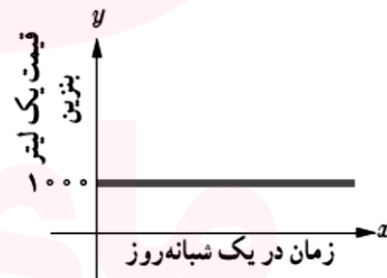
① برای هر تابع زیر، یک ضابطه مناسب نوشته و نمودار آن را رسم کنید. سپس مشخص کنید که کدام یک از آن ثابت، همانی یا چند ضابطه ای است.  
 الف) به مناسبت روز درختکاری در یک مدرسه هر دانش آموز یک نهال می‌کارد.  
 حل:

تابع همانی  $f(x) = x, x \in N$



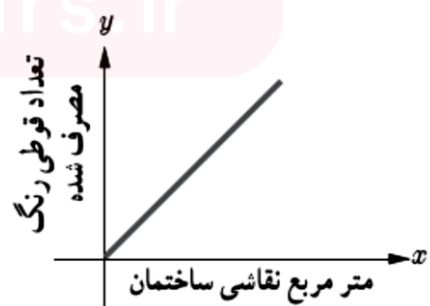
ب) هزینه یک لیتر بنزین معمولی در هر ساعت شبانه روز ۱۰۰۰ تومان است.  
 حل:

تابع ثابت  $f(x) = 1000, x \geq 0$



ج) برای هر یک متر مربع نقاشی یک ساختمان، یک قوطی رنگ کوچک استفاده می‌شود.  
 حل:

تابع همانی  $f(x) = x, x \in R$





## فصل ۲ درس ۲: توابع پلکانی و قدر مطلق

### اهداف درس ۲:

- معرفی تابع پلکانی و شناخت آن در مسائل واقعی؛
- مفهوم سطح زیر نمودار یک تابع با توجه به متغیر مستقل و وابسته؛
- معرفی تابع جزء صحیح و رسم آن؛
- معرفی تابع قدرمطلق و کاربرد آن برای توصیف و تحلیل دقیق و علمی مسائل پیرامون؛
- تبدیل تابع قدر مطلق به دو ضابطه و برعکس؛
- مدل سازی مسائل واقعی به کمک تابع پلکانی و تابع قدرمطلق؛
- رسم نمودار توابع قدرمطلق.

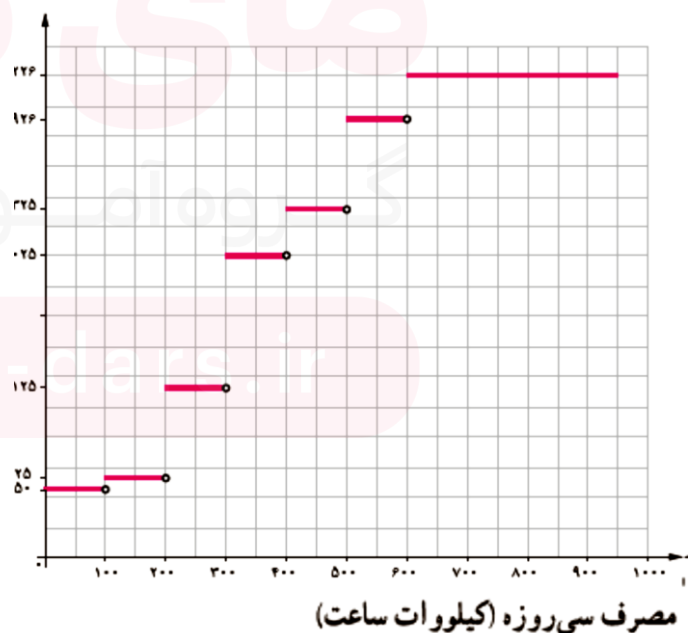
### توابع پلکانی:

هر تابع چند ضابطه ای که همه ضابطه هایش عدد ثابت باشند، تابع پلکانی می نامیم. مثل:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ 3 & x \geq 1 \end{cases}$$

نمودار توابع پلکانی فقط شامل خطوط افقی است چون تمام ضابطه های آن عدد ثابت است. مثل نمودار هزینه برق مصرفی خانه در سی روز

هزینه پلکانی برق (ریال)



(تمرین ۳ ص ۴۳)

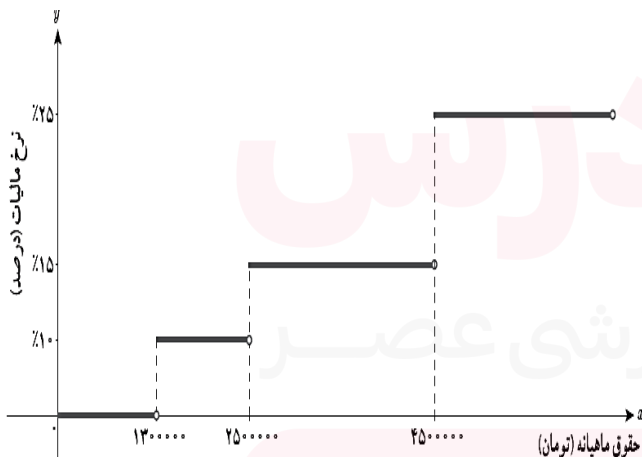
③ جدول مالیاتی زیر را، که توسط هیئت مدیره یک شرکت برای سال جدید مالی آماده و تصویب شده است، در نظر بگیرید:

الف) نمودار پلکانی متناظر با جدول مالیاتی را رسم کنید.  
ب) به کمک نمودار پلکانی و محاسبه سطح متناظر با هر یک از حقوق های ماهیانه، مبلغ مالیات هر یک از کارمندان زیر را محاسبه کنید:

- کارمندی با حقوق ۱ / ۲۰۰ / ۰۰۰ تومان
- کارمندی با حقوق ۲ / ۴۰۰ / ۰۰۰ تومان
- کارمندی با حقوق ۶ / ۰۰۰ / ۰۰۰ تومان

نرخ مالیات (درصد)	حقوق ماهیانه (تومان)
معاف از مالیات	حقوق تا ۱,۵۰۰,۰۰۰
۱۰	مزداد بر ۱,۳۰۰,۰۰۰ تا ۲,۵۰۰,۰۰۰
۱۵	مزداد بر ۲,۵۰۰,۰۰۰ تا ۴,۵۰۰,۰۰۰
۲۵	مزداد بر ۴,۵۰۰,۰۰۰

☑ حل: الف)



ب) مبلغ مالیات پرداختی برابر با سطح زیر نمودار است.

کارمندی با حقوق ۱ / ۲۰۰ / ۰۰۰ تومان، معاف از مالیات

کارمندی با حقوق ۲ / ۴۰۰ / ۰۰۰ تومان

$$2400000 - 1300000 = 1100000$$

$$1100000 \times \frac{10}{100} = 110000 \text{ تومان}$$

کارمندی با حقوق  $60000000$  تومان

$$\begin{aligned} & (25000000 - 13000000) \times \frac{10}{100} + \\ & (45000000 - 25000000) \times \frac{15}{100} + \\ & (60000000 - 45000000) \times \frac{25}{100} \end{aligned}$$

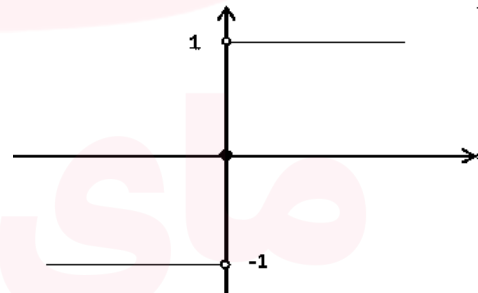
$$= 1200000 + 3000000 + 3750000 = 7950000 \text{ تومان}$$

تابع علامت:

(گاردنر گلابی ص ۳۵)

تابع پلکانی که ضابطه آن به صورت زیر باشد را تابع علامت می نامیم و آن را با  $y = \text{sign}(x)$  نشان می دهیم.  
دامنه تابع علامت  $R$  و برد آن  $\{-1, 0, 1\}$  می باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



تابع جزء صحیح:

تابع جزء صحیح یا براکت از نوع توابع پله ای است که به صورت

$$f(x) = [x] \text{ می باشد که می خوانیم جزء صحیح } x \text{ یا}$$

$$\text{براکت } x \text{ . مثل: } [2]$$

دامنه و برد توابع جزء صحیح:

تابع جزء صحیح کارش صحیح سازی و هر عددی که وارد تابع

$$D_f = R$$

شود جزء صحیح آن عدد را بیرون می دهد. بنابراین:

$$R_f = Z$$

✓ نکته: جزء صحیح (براکت) هر عدد صحیح، برابر است با خود آن عدد

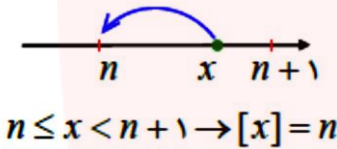
$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ x \in Z \end{array} \right] = x \end{aligned}$$

مثل:

$$[2] = 2, \quad [-2] = -2$$

✓ جزء صحیح (براکت) هر عدد غیر صحیح، برابر است با اولین عدد صحیح سمت چپ آن روی محور اعداد.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ x \notin Z \end{array} \right] \xrightarrow{n < x < n+1} n \end{aligned}$$



مثل:

$$[2/7] = 2$$

$$[-0/7] = -1$$

✓ راه کوتاه: براکت در اعداد مثبت، اعشار را از بین می برد و در اعداد منفی علاوه بر از بین بردن اعشار، یک واحد هم کم می کند.

مثل:

$$[0/7] = 0, \quad [-2/7] = -2 - 1 = -3$$

(گاردنر گلابی ص ۳۹ و تهرپین ۱ ص ۴۳)

حاصل عبارات زیر را بیابید

$$[-0/07] = \quad [-3/2] =$$

$$[-\pi] = \quad [-2/2] =$$

$$[\pi] = \quad [-1/2] =$$

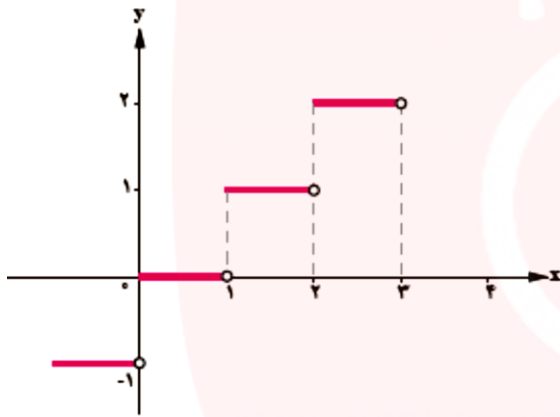
$$[4/2] = \quad [-4/2] =$$

$$[3/99] = \quad [-3/2] =$$

(گاردور کلاسی ص ۳۹)

② تابع  $g(x) = [x]$  در فاصله  $-1 \leq x < 3$  را رسم کنید.  حل:

$$g(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$



تابع قدر مطلق:

تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدر مطلق آن در برد نظیر می کند، تابع قدر مطلق نامیده می شود، تابع قدر مطلق را به صورت  $f(x) = |x|$  نمایش می دهند. مثل:  $f(x) = |2|$

✓ هر عددی که وارد تابع قدر مطلق شود عددی نامنفی بیرون می دهد پس دامنه آن  $R$  و برد آن اعداد حقیقی نامنفی است

✓ قدر مطلق هر عدد مثبت یا صفر، برابر است با خود آن عدد. مثل:  $|2| = 2$  ,  $|0| = 0$

✓ قدر مطلق هر عدد منفی، برابر است با قرینه آن عدد. مثل:  $|-2| = -(-2) = 2$

✓ قدر مطلق هر عدد با قدر مطلق قرینه اش برابر است. مثل:

$$|2| = |-2| \quad , \quad |x-2| = |2-x|$$

✓ حاصل  $[x] + [-x]$  اگر  $x$  عدد صحیح باشد برابر صفر و اگر  $x$  عددی غیر صحیح باشد برابر  $-1$  است

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases}$$

(تمرین ۲ ص ۴۳)

جدول زیر را کامل کنید

ضابطه تابع	مقدار $x$	مقدار $f(x)$
$f(x) = [x]$	$x = -2/3$	
	$x = 5$	
$f(x) = [-x]$	$x = 1/7$	
	$x = 2/3$	
$f(x) = [x] + [-x]$	$x = 1$	
	$x = 1/3$	
	$x = 1/7$	
	$x = 2$	
$f(x) = [3x]$	$x = 1$	
	$x = 0/2$	
	$x = 1/3$	

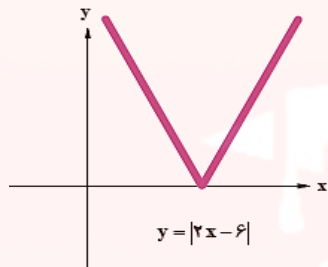
رسم تابع جزء صحیح:

برای رسم تابع جزء صحیح در یک بازه (فاصله) کافی است طول فاصله را به فاصله هایی به طول یک دسته بندی کنیم

۳. جدول نقطه یابی و رسم نمودار

در جدول ابتدا به  $x$  عدد ریشه، سپس نقاط کمکی (یک واحد کمتر و یک واحد بیشتر از ریشه) را دوطرف آن قرار داده و عرض نقاط را می یابیم

$x$	۲	۳	۴
$y$	۲	۰	۲



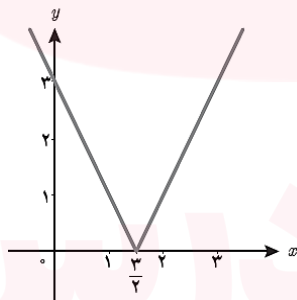
(تمرین ۵ ص ۴۴)

۵(الف) نمودار تابع  $y = |2x - 3|$  را رسم کنید.

$$2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$y = \begin{cases} 2x - 3 & x \geq \frac{3}{2} \\ -(2x - 3) & x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$x$	۰	$\frac{3}{2}$	۳
$y$	۳	۰	۳



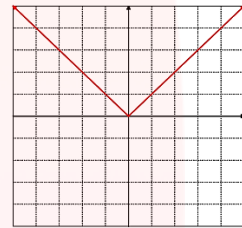
ب) نمودار تابع  $y = |3x + 1|$  را رسم کنید.

✓ تابع قدرمطلق را مطابق تعریف می توان به صورت تابع دوضابطه ای نوشت:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

✓ اگر دامنه یک تابع قدر مطلق، مجموعه اعداد حقیقی باشد نمودار آن به صورت زیر می باشد.

$$f(x) = |x|$$



$x$	-۱	۰	۱
$y$	۱	۰	۱

رسم تابع قدرمطلق:

تابع قدرمطلق را می توان به دو روش زیر رسم کرد:

۱. توابع به فرم  $y = |ax + b|$  به صورت دوضابطه ای
۲. توابع به فرم  $y = |x| \pm b$  ,  $y = |x \pm a|$  به کمک انتقال

مرآل رسم توابع به فرم  $y = |ax + b|$  به صورت دوضابطه ای:

۱. ریشه یابی
  ۲. ضابطه بندی
  ۳. جدول نقطه یابی و رسم نمودار
- (مثال ص ۴۲)

نمودار تابع  $y = |2x - 6|$  را رسم کنید.  حل:

۱. ریشه یابی  $2x - 6 = 0 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3$

۲. ضابطه بندی

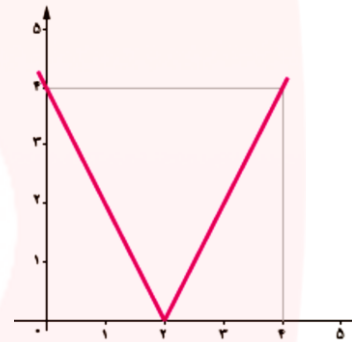
$$y = |2x - 6| = \begin{cases} 2x - 6 & x \geq 3 \\ -(2x - 6) & x < 3 \end{cases}$$

مرآل نوشتن ضابطه تابع به فرم  $y = |ax + b|$  از روی نمودار:

ابتدا جدول نقطه یابی را می کشیم سپس معادله هر نیم خط را نوشته و داخل قدر مطلق قرار می دهیم تا ضابطه تابع به دست آید.

(گاردو گلاسی ص ۴۱)

با توجه به شکل ضابطه تابع را بنویسید.



حل:

با توجه به شکل ریشه نمودار و نقاط کمکی آن را می یابیم بنابراین:

$x$	۰	۲	۴
$y$	۴	۰	۴

از طریق جدول نقاط معادله هر نیم خط را می نویسیم:

$$(2, 0), (0, 4) \rightarrow y = m(x - x_1) \xrightarrow{m=-2} y = -2x + 4$$

$$(2, 0), (4, 4) \rightarrow y = m(x - x_1) \xrightarrow{m=2} y = 2x - 4$$

معادله نیم خط هارا داخل قدر مطلق قرار می دهیم و ضابطه را می یابیم:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 4 \quad x \geq 2 \\ -2x + 4 \quad x < 2 \end{array} \right\} \rightarrow y = |2x - 4|$$

رسم توابع به فرم  $y = |x \pm a|$ ,  $y = |x| \pm b$  به کمک انتقال:

✓ در تابع به فرم  $y = |x| \pm b$  انتقال به صورت

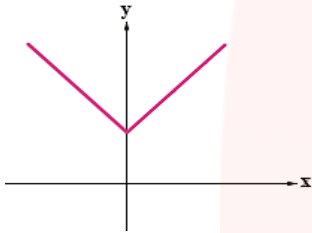
آسانسوری (عمودی) است

(گاردو گلاسی ص ۴۲ و مثال)

۱. نمودار تابع  $y = |x| + 1$  را رسم کنید.

حل: نمودار  $y = |x|$  را واحد

به بالا منتقل می کنیم



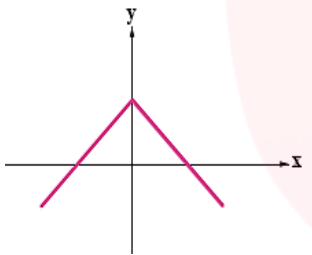
۲. نمودار تابع  $y = -|x| + 1$  را رسم کنید.

حل: ابتدا نمودار  $y = |x|$  را

نسبت به محور  $x$  ها قرینه

می کنیم سپس نمودار  $y = -|x|$

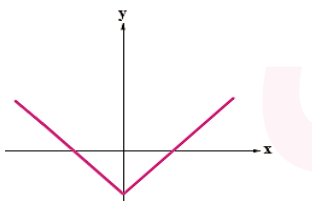
را واحد به بالا منتقل می کنیم



۳. نمودار تابع  $y = |x| - 3$  را رسم کنید.

حل: نمودار  $y = |x|$  را ۳ واحد

به پایین منتقل می کنیم



✓ در تابع به فرم  $y = |x \pm a|$  انتقال به صورت قطاری

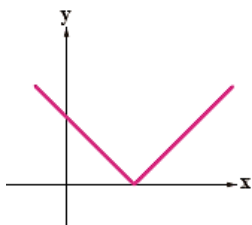
(افقی) است

(گاردو گلاسی ص ۴۲)

۱. نمودار تابع  $y = |x - 4|$  را رسم کنید.

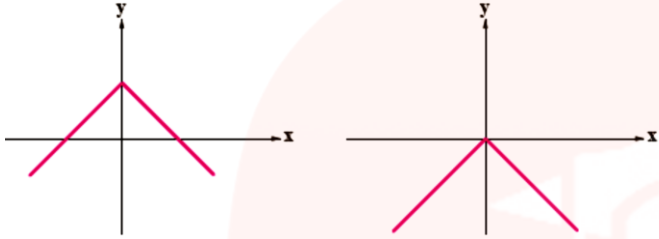
حل: نمودار  $y = |x|$  را ۴ واحد

به راست منتقل می کنیم



الف)  $y = -|x|$

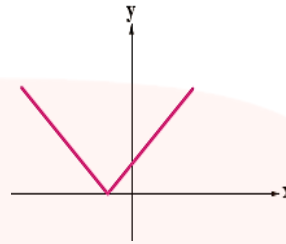
ب)  $y = -|x| + 1$



۲. نمودار تابع  $y = |x + 1|$  را رسم کنید.

☑ حل: نمودار  $y = |x|$  را واحد

به چپ منتقل می کنیم



۳. نمودار تابع  $y = |x - 3|$  را رسم کنید.

(تمرین ۴ ص ۴۴)

با توجه به نمودارهای زیر، کدام نمودار، تابع الف و کدام نمودار، تابع ب را مشخص می کند؟

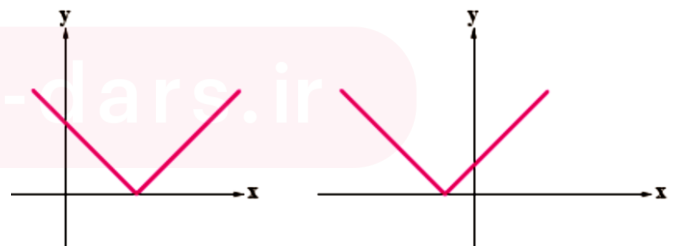
الف)  $y = |x| + 2$

ب)  $y = |x| - 3$



الف)  $y = |x + 1|$

ب)  $y = |x - 4|$



## فصل ۲ درس ۳: اعمال بر روی توابع

### اهداف درس ۳:

- آشنایی با تعیین دامنه در اعمال میان توابع؛
- آشنایی با اعمال میان توابع به کمک ضابطه توابع؛
- آشنایی با اعمال میان توابع به کمک زوج مرتب ها و رسم نمودار آنها؛

### اعمال جبری روی توابع (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم):

اگر  $f, g$  به ترتیب دو تابع با دامنه های  $D_f, D_g$  باشند، در این صورت جمع، تفریق، ضرب و تقسیم آنها را به صورت زیر تعریف می کنیم.

تابع	ضابطه	دامنه
$f + g$	$(f + g)(x)$	$D_f \cap D_g$
$f - g$	$(f - g)(x)$	$D_f \cap D_g$
$f \times g$	$(f \times g)(x)$	$D_f \cap D_g$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$D_f \cap D_g - \{x / g(x) = 0\}$

- ✓ نکته: همواره دامنه را قبل از ساده کردن ضابطه آن محاسبه می کنیم
- ✓ جمع و تفریق دو تابع خطی، تابعی خطی است
- ✓ ضرب دو تابع خطی، تابعی سهمی است
- ✓ تقسیم دو تابع خطی، تابعی گویا است

### ۱) اعمال جبری روی نمودار جبری توابع:

(فعالیت ص ۴۹ و گاردردر کلاسی ص ۵۰)

اگر  $f(x) = x^2 - 1$  و  $g(x) = x + 1$  باشد ضابطه توابع

$$(f + g), (f - g), (g - f), (f \times g), \left(\frac{f}{g}\right), \left(\frac{g}{f}\right)$$

را به دست آورید.

$$\left. \begin{array}{l} D_f = R \\ D_g = R \end{array} \right\} \xrightarrow{\cap} R \quad \square \text{حل:}$$

$$D_{f+g} = R$$

$$f + g = x^2 - 1 - x - 1 = x^2 - x - 2$$

$$D_{f-g} = R$$

$$f - g = x^2 - 1 - x - 1 = x^2 - x - 2$$

$$D_{g-f} = R$$

$$g - f = x + 1 - x^2 + 1 = -x^2 + x + 2$$

$$D_{f \times g} = R$$

$$f \times g = (x^2 - 1) \times (x + 1) = x^3 + x^2 - x - 1$$

$$D_{\frac{f}{g}} = R - \{-1\}$$

$$\frac{f}{g} = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} = x - 1$$

$$\downarrow$$

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$$

$$D_{\frac{g}{f}} = R - \{\pm 1\}$$

$$\frac{g}{f} = \frac{x + 1}{x^2 - 1} = \frac{x + 1}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{1}{x - 1}$$

$$\downarrow$$

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

$$D_{f-g} = \{3, 7\}$$

$$f - g = \left\{ \left( 3, \underbrace{5 - (-1)}_6 \right), \left( 7, \underbrace{-1 - 2}_{-3} \right) \right\}$$

$$D_{g-f} = \{3, 7\}$$

$$g - f = \left\{ \left( 3, \underbrace{-1 - 5}_{-6} \right), \left( 7, \underbrace{2 - (-1)}_3 \right) \right\}$$

$$D_{f \times g} = \{3, 7\}$$

$$f \times g = \left\{ \left( 3, \underbrace{5 \times (-1)}_{-5} \right), \left( 7, \underbrace{-1 \times 2}_{-2} \right) \right\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{3, 7\}$$

$$\frac{f}{g} = \left\{ \left( 3, \frac{5}{-1} \right), \left( 7, \frac{-1}{2} \right) \right\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{3, 7\}$$

$$\frac{f}{g} = \left\{ \left( 3, \frac{-1}{5} \right), \left( 7, \frac{2}{-1} \right) \right\}$$

① برای دو تابع  $f(x) = x + 1$  و  $g(x) = x - 1$  جدول داده شده ی زیر را کامل کنید.

تابع	ضابطه	دامنه
$f + g$		
$\bullet (f + g)(2)$		
$f - g$		
$f \times g$		
$\frac{f}{g}$		

• برای به دست آوردن مقدار تابع ابتدا در ضابطه تابع  $f, g$  به جای  $x$  مقدار مورد نظر را نوشته و حاصل را می یابیم سپس اعمال جبری بر روی توابع را محاسبه می کنیم

۲) اعمال جبری روی زوج مرتب تولید: (مثال ص ۴۸)

دامنه و ضابطه حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق دو تابع داده شده را بیابید.

$$f = \left\{ (1, 2), (-3, 4), (3, 5), (7, -1) \right\}$$

$$g = \left\{ (2, 1), (3, -1), (7, 2) \right\}$$

✓ حل: ابتدا دامنه هر تابع سپس اشتراک آنها را نوشته و

اعمال جبری را روی مولفه دوم ( $y$ ) انجام می دهیم

$$D_f = \{1, -3, 3, 7\}$$

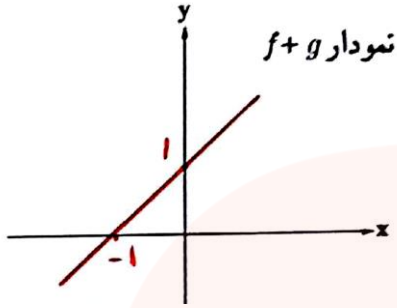
$$D_g = \{2, 3, 7\}$$

$$\cap \rightarrow \{3, 7\}$$

$$D_{f+g} = \{3, 7\}$$

$$f + g = \left\{ \left( 3, \underbrace{5 + (-1)}_4 \right), \left( 7, \underbrace{-1 + 2}_1 \right) \right\}$$



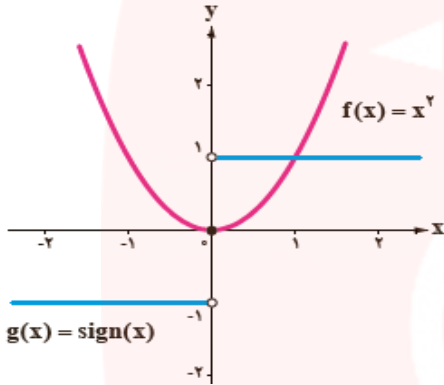


(کار و کلاسی ص ۵۰)

دامنه و ضابطه حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق دو تابع داده شده را بیابید.

$$f = \{(2, 0), (4, -1), (-1, 3)\}$$

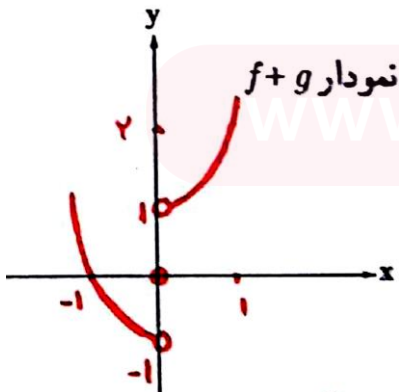
$$g = \{(2, 5), (3, -1), (-1, 2)\}$$



حل:

$$f + g = x^2 + \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

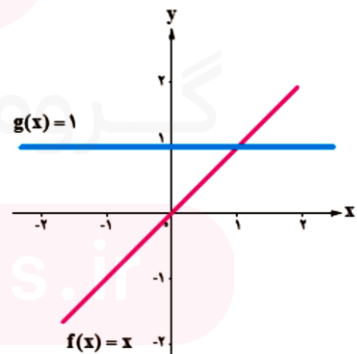
$$\rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \rightarrow \begin{array}{l|l} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 2 \end{array} \\ x^2 & x = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x^2 - 1 & x < 0 \rightarrow \begin{array}{l|l} x & 0 & -1 \\ y & -1 & 0 \end{array} \end{cases}$$



۳) اعمال جبری روی نمودار توابع:

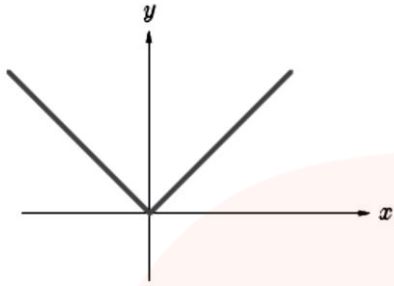
(فعالیت ص ۱۵)

با توجه به نمودار توابع  $f, g$  نمودار تابع  $f + g$  را رسم کنید.



$$f + g = x + 1 \rightarrow \begin{array}{l|l} x & 0 & -1 \\ y & 1 & 0 \end{array}$$

حل:



$$f(x) = |x|, g(x) = |x|$$

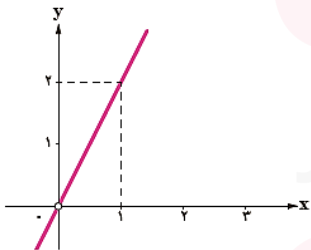
$$f \times g =$$

$$\frac{f}{g} =$$

(تمرین ۴ ص ۵۳)

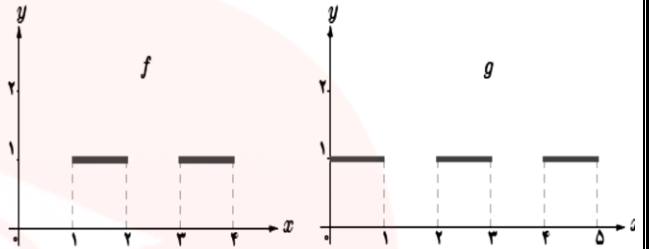
④ اگر  $f(x) = x^2$  و تابع  $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$  به صورت نمودار

زیر باشد، ضابطه تابع  $g(x)$  را به دست آورید.

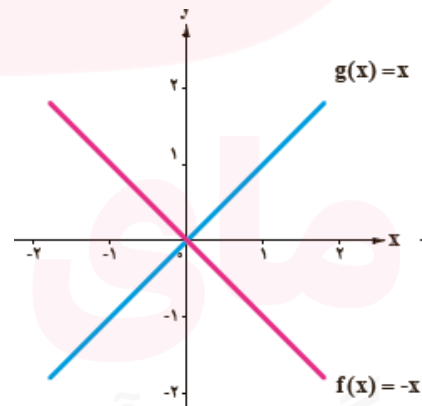


(تمرین ۱ و ۲ ص ۵۵ و ۵۵)

با توجه به نمودار توابع  $f, g$  نمودار تابع خواسته شده را رسم کنید. الف)



$$f + g =$$



$$f + g =$$