

نام: ..

ساعت شروع: 8 صبح

نام خانوادگی:

مدت ارزشیابی: 120 دقیقه

نام پدر: ..

نام آموزشگاه:

شماره:

تعداد صفحه: 3 صفحه

دی ماه

دبیر: تکریمی

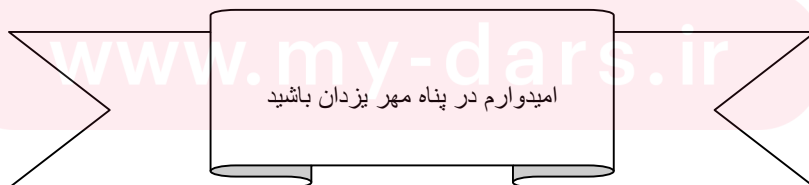
ردیف	بارم
1	الف) در حالت کلی ضرب ماتریس ها خاصیت جابه جایی ب) در واقع حل دستگاه دو معادله و دو مجهول، همان یافتن است. ج) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه ثابت o به فاصله ثابت k قرار دارند، است.
2	فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ از رابطه محاسبه می شود.
3	اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2x+y & 5 \\ 2z-1 & -3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -14 & x-y \\ 11 & t \end{bmatrix}$ مساوی یکدیگر باشند، آنگاه مقادیر مجهول را بدست آورید.
4	به ازای چه مقادیری از k، دستگاه $\begin{cases} kx + 2y = 2k + 1, \\ 3x + (k-1)y = 7, \end{cases}$ بی شمار جواب دارد؟
5	دترمینان ماتریس $H = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ را با استفاده از روش ساروس بیابید.

6	اگر A ماتریسی 3×3 باشد، $ A = -2$ حاصل عبارت زیر را بیابید.	1	$ A A =$
7	اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، آنگاه حاصل عبارت $A^2 - 5A + 4I$ را بیابید.	1.5	
8	دستگاه معادلات را با استفاده از ماتریس وارون حل نمایید.	2	$\begin{cases} 5x + 2y = 2, \\ 13x + 7y = -2 \end{cases}$
9	معادله دایره ای را بنویسید که از نقاط $(0, 1)$ و $(3, 0)$ عبور کند و خط $x - y = 2$ شامل قطری از آن باشد.	1.5	

مای دررس
گروه آموزشی عصر

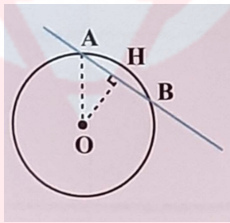
www.my-dars.ir

2	10	وضعیت دو دایره زیر را نسبت به هم تعیین نمایید. $\begin{cases} C_1: x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3, \\ C_2: x^2 + y^2 - 10x - 14y + 73 = 0, \end{cases}$
2	11	تعیین کنید کدام یک از روابط زیر معادله یک دایره می تواند باشد؟ (مختصات مرکز و شعاع دایره را به دست آورید) الف) $2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - 2 = 0$ ب) $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 4 = 0$.
1.5	12	رابطه ضمنی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ، معادله یک دایره است. اکنون سه حالتی را که ممکن است برای آن رخ دهد بنویسید.
1.5	13	معادله دایره ای را بنویسید که $O(0, 1)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله $x + y = 2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند.



ردیف	پاسخ تشریحی	بارم
1	الف) ندارد ب) نقطه ای که روی هر دو خط واقع شده ج) دایره ای به مرکز O و شعاع k است $C(O, k)$	
2	اگر فاصله نقطه از خط را AH بنامیم $AH = \frac{ ax_0 + by_0 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$	
3	$\begin{cases} 2x + y = -14 \\ x - y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -3 - 5 = -8 \rightarrow y = -8 \\ 3x = -14 + 5 = -9 \rightarrow x = -3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2z - 1 = 11 \\ t = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 6 \\ t = -3 \end{cases}$	
4	شرط آنکه بی شمار جواب داشته باشد: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ $\left\{ \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \rightarrow \frac{k}{3} = \frac{2}{k-1} \rightarrow k(k-1) = 6 \right.$ $\rightarrow k^2 - k - 6 = 0 \rightarrow (k-3)(k+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = -2 \end{cases}$ $k = 3 \rightarrow \frac{3}{3} = \frac{7}{7} \rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \rightarrow$ دستگاه بی شمار جواب دارد $k = -2 \rightarrow \frac{-2}{3} \neq \frac{-3}{7} \rightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{c}{c'} \rightarrow$ دستگاه فاقد جواب است پس دستگاه تنها به ازای $k = 3$ بی شمار جواب دارد.	
5	$ A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = (4 - 9 - 8) - (-8 - 12 + 3) = -13 + 17 = 4$	
6	$ A A = -2A = (-2)^3 A = -8 \times (-2) = 16$	

	$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 22 \end{bmatrix}$ $A^2 - 5A + 4I = \begin{bmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 10 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$	7
	$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 13 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -13 & 5 \end{bmatrix}$ $AX = B \rightarrow X = A^{-1}B = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -13 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 18 \\ -36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ $\rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases} \rightarrow X = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$	8
	مرکز دایره یعنی نقطه $O(\alpha, \beta)$ روی خط $x - y = 2$ قرار دارد. بنابراین $\beta = \alpha - 2$ است. با فرض $A(0,1)$ و $B(3,0)$ داریم: $OA = OB \rightarrow \sqrt{(0 - \alpha)^2 + (1 - \beta)^2} = \sqrt{(3 - \alpha)^2 + (0 - \beta)^2}$ $\rightarrow \alpha^2 + (\beta - 1)^2 = (\alpha - 3)^2 + \beta^2 \quad \text{طرفین به توان 2 می‌رسانیم}$ $\rightarrow \alpha^2 + (\alpha - 3)^2 = (\alpha - 3)^2 + (\alpha - 2)^2, \quad \beta = \alpha - 2 \quad \text{داریم}$ $\rightarrow \alpha^2 = (\alpha - 2)^2$ $\rightarrow \alpha^2 = \alpha^2 - 4\alpha + 4$ $\rightarrow 4\alpha = 4 \rightarrow \alpha = 1$ بنابراین نقطه $O(1, -1)$ مرکز دایره است و داریم: $R = OA = \sqrt{(0 - 1)^2 + (1 + 1)^2} = \sqrt{5}$ معادله دایره عبارت است از: $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$	9
	در دایره C_1 داریم؛ مرکز دایره: $O(2,3)$ شعاع دایره: $R = \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} - 4(-3) = \frac{1}{2} \sqrt{64} = 4$ در دایره C_2 داریم؛ مرکز دایره: $O'(5,7)$ شعاع دایره: $R' = \frac{1}{2} \sqrt{(-10)^2 + (-14)^2} - 4(-73) = \frac{1}{2} \sqrt{4} = 1$ $OO' = \sqrt{(5 - 2)^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{25} = 5$ دو دایره مماس بیرون هستند $5 = 4 + 1 \rightarrow OO' = R + R' \rightarrow$	10

	الف) طرفین رابطه را بر 2 تقسیم می کنیم: $x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + 2y - 1 = 0$ $a^2 + b^2 - 4c = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 + 2^2 - 4(-1) = \frac{41}{4} + 4 + 4 = \frac{41}{4} > 0$ $\rightarrow a^2 + b^2 > 4c,$ لذا معادله داده شده معادله یک دایره است. $O\left(\frac{3}{4}, -1\right)$ $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{4} + 4 + 4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{41}}{2} = \frac{\sqrt{41}}{4}$ ب) $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 4 = 0$ $a^2 + b^2 - 4c = 2^2 + 3^2 - 4(4) = -3 < 0 \rightarrow a^2 + b^2 < 4c$ بنابراین معادله داده شده، معادله یک دایره است.	11
	1- این رابطه، معادله یک دایره است، اگر و تنها اگر $a^2 + b^2 > 4c$ 2- اگر $a^2 + b^2 < 4c$ باشد، این معادله هیچ نقطه از صفحه را مشخص نمی کند 3- اگر $a^2 + b^2 = 4c$ باشد، این معادله تنها یک نقطه به مختصات $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ را در صفحه مشخص می کند.	12
	می دانیم قطر عمود بر یک وتر آن وتر را نصف می کند. بنابراین کافی است فاصله مرکز دایره را از خط $x + y = 2$ به دست آوریم.  $OH = \frac{ 0+1-2 }{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $AH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ $OAH: OA^2 = OH^2 + AH^2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \rightarrow R^2 = \frac{5}{2}$ $x^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{2}$ معادله دایره:	13