

نام و نام خانوادگی:

شماره آمار:

پایه و رشته: ۱۲ ریاضی

امتحانات نوبت: اول

بسمه تعالی

آزمون درس: گسسته

تاریخ آزمون: ۱۰ / ۳

زمان پاسخگویی: ۱۰۰ دقیقه

طراح سوال:

نمره به عدد:

نمره به حروف:

۲	<p>جاهای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید:</p> <p>الف) حاصل $(72, [48, 120])$ برابر است با.....</p> <p>ب) رقم یکان عدد 1393^{1899} برابر..... است.</p> <p>پ) در گراف G با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d, f\}$ و مجموعه یال های $E = \{ac, ab, bc, bd, af, cf\}$ مجموعه همسایه های باز رأس a برابر است با.....</p> <p>ت) مجموع درجه های گراف G راسی 6 برابر 12 و مجموع درجه های گراف \bar{G} برابر با..... است.</p>	1
۲	<p>الف) ثابت کنید: $a^x + b^y + c^z \geq ab + ac + bc$</p> <p>ب) ثابت کنید اگر به حاصل ضرب دو عدد فرد متوالی یک واحد اضافه کنیم، حاصل مضرب 4 است.</p>	2
2/25	<p>گزاره های زیر را اثبات و یا با ارایه مثال نقض رد کنید:</p> <p>الف) حاصل ضرب هر عدد گویا در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.</p> <p>ب) اگر p عددی اول و $a \in \mathbb{Z}$ و $a \nmid p$، آنگاه معادله سیاله $ax + py = 19$، همواره دارای جواب است.</p> <p>پ) مربع هر عدد فرد به صورت $8q+1$ است.</p>	3
۱/۵	<p>در یک تقسیم اگر به مقسوم 88 واحد و به مقسوم علیه 10 واحد اضافه کنیم از باقی مانده 2 واحد کم و خارج قسمت تغییری نمی کند خارج قسمت را به دست آورید.</p>	4
1/۵	<p>ثابت کنید $29 \mid 2^{90} + 5^{90}$</p>	5

۲	۲۰ کیلوگرم شکر را می خواهیم در بسته های ۳ کیلویی و ۲ کیلویی بسته بندی کنیم تمام حالت های ممکن را مشخص کنید .	6
2/25	<p>الف) ثابت کنید $2^{4n} - 1$ بر ۳ تقسیم پذیر است.</p> <p>ب) هر گاه سال نو با یکشنبه آغاز شود 22 آذر چه روزی است؟</p> <p>پ) رقم یکان عدد $23^{23} - 17^{17}$ را بیابید.</p>	7
2/5	<p>در گراف $G(V, E)$ داریم $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ و $E = \{ab, af, bd, bf, cf, df, ce\}$</p> <p>الف) گراف را رسم کنید.</p> <p>ب) مقدار Δ و δ را تعیین کنید.</p> <p>پ) مجموعه $N_G(b)$ را مشخص کنید.</p> <p>ت) همه دورهای بطول ۳ را در این گراف را بنویسید.</p> <p>ث) چند یال جدید به گراف اضافه کنیم تا گرافی کامل به دست آید؟</p>	8
۱/۵	گرافی از مرتبه ۱۲ و اندازه ی ۲۲ فقط رؤس از درجه ۳ و ۵ دارد، این گراف چند راس از درجه ۳ دارد؟	9
۰/۵	گراف ناهمبندی از مرتبه ۶ بیشترین تعداد یال ممکن را دارد نمودار این گراف را رسم کنید.	10
۲	<p>گراف ساده G سه منتظم است و تعداد یال هایش ۴ واحد بیشتر از تعداد راس های آن است.</p> <p>الف) مرتبه و اندازه گراف را مشخص کنید.</p> <p>ب) گرافی همبند و گرافی ناهمبند با این مشخصات رسم کنید.</p>	11

$\mathbb{N} (= \mathbb{N}_0(a) = \{b, c, f\}) \quad \forall \quad \mathbb{Z} \quad (a) - 1$

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc \iff x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \quad (a) - 2$
 $\iff x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq 0 \iff x^2 - xy + y^2 + xz - yz + z^2 + b^2 - bc + c^2 \geq 0$
 $\iff (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0$ *حاصل شود که هر سه نامنفی است*

$a = 2k-1$
 $b = 2k+1$
 $a \times b = (2k-1)(2k+1) = 4k^2 - 1$
 $a \times b + 1 = 4k^2 - 1 + 1 = 4k^2 \quad \checkmark$ (c) - 2

$a = 0$
 $b = \sqrt{2}$
 $a \times b = 0 \times \sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Q}$ *مطلوبه است* (a) - 3

$P \nmid a \implies (p, a) = 1 \mid a$ *مطلوبه است* (b) - 3

$a = 2k+1 \xrightarrow{+1} a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1 = 4 \times q + 1 = 4q + 1$ (c) - 5
حاصل شود که هر سه نامنفی است

$a = bq + r$
 $a + 1 = (b+1)q + r - r$
 $\implies bq + r + 1 = (b+1)q + r - r$
 $\implies 1 \cdot q = 1 \implies \boxed{q = 1}$ (d) - 3

$2q \mid 2 + 9 \implies 2 + 9 \mid 2 + 9 \implies \frac{9}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$ (e) - 5

چون نسبت توان ها هم برابر است پس هر دو توان را از این رابطه برطرف است.

$2m + 3j = 2 \quad (2, 3) = 1 \mid 2$ *پس حاصل می شود* (f) - 4
 $2m \equiv 2 \pmod{3} \xrightarrow{+3} m \equiv 1 \pmod{3} \implies m = 3k + 1 \quad k \geq -1$
 $2(3k+1) + 3j = 2 \implies j = -2k \quad k \leq 0$
 $\implies -2 \leq k \leq 0$

k	-2	-1	0
m	1	2	3
j	4	2	0

مطلوبه است

