

درس دوم: احتمال غیر هم شانس

هر زیر مجموعه‌ی تک عضوی از فضای نمونه‌ای را یک پیغام ساده گوئیم. به طور مثال اگر a عضوی از فضای نمونه‌ای باشد، $\{a\}$ یک پیغام ساده‌ی آن فضای نمونه‌ای است که احتمال وقوع آن را با $P(\{a\})$ یا به اختصار با $P(a)$ نمایش می‌دهیم.

تاسی را در نظر بگیرید که روی هر وجه آن یک از اعداد ۱ تا ۶ نوشته شده است. اگر این تاس را پرتاب کنیم، فضای نمونه‌ای عدد رو آمده $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است که پیغام‌های ساده آن $\{1\}$ ، $\{2\}$ ، $\{3\}$ ، $\{4\}$ ، $\{5\}$ و $\{6\}$ می‌باشند و احتمال وقوع هر یک از آنها یکسان و برابر $\frac{1}{6}$ است: $P(1) = P(2) = \dots = P(6) = \frac{1}{6}$. این نوع احتمال را به عنوان احتمال هم شانس معرفی کرده‌ایم.

این بار تاسی را در نظر بگیرید که روی سه وجه آن عدد ۱، روی دو وجه آن عدد ۲ و روی وجه باقی مانده عدد ۳ مشأ شده می‌شود. اگر این تاس را پرتاب کنیم، فضای نمونه‌ای عدد رو آمده $S = \{1, 2, 3\}$ است که پیغام‌های ساده آن $\{1\}$ ، $\{2\}$ و $\{3\}$ می‌باشند. از ۱ وجه، ۲ وجه تاس عدد ۱ است بنابراین: $P(1) = \frac{2}{3}$ از ۲ وجه، ۱ وجه تاس عدد ۲ است پس: $P(2) = \frac{1}{3}$ از ۳ وجه، ۱ وجه تاس عدد ۳ است در نتیجه: $P(3) = \frac{1}{3}$ همان طور که متوجه شدید در این آزمایش احتمال پیغام‌های ساده یکسان نبود، این نوع احتمال معروف به احتمال غیر هم شانس است.

تعریف: هرگاه حداقل دو پیغام ساده از فضای نمونه‌ای S احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای با احتمال غیر هم شانس گوئیم.



قوانین حاکم بر احتمال غیر هم شانس:

در فضای نمونه ای متناهی $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ با احتمال غیر هم شانس، اگر $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ یک زیر مجموعه k عضوی S باشد، آنگاه:

$$1. \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$2. \quad P(S) = 1$$

$$3. \quad P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k)$$

نتیجه ی مهم: جمع احتمال پیغام‌ها ساده برابر یک است به عبارت دیگر:

$$P(S_1) + P(S_2) + \dots + P(S_n) = 1$$

سوال: با فرض $S = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ و $P(S_1) = 2P(S_2)$ و $P(S_3) = P(S_4) = \frac{1}{4}$ مطلوب است $P(S_1)$ و $P(S_2)$.

بگیریم $P(S_2) = x$ و در نتیجه طبق فرض سوال $P(S_1) = 2x$ خواهد شد. بنابراین:

$$P(S_1) + P(S_2) + P(S_3) + P(S_4) = 1 \rightarrow 2x + x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow 3x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{6}$$

در نتیجه $P(S_2) = \frac{1}{6}$ و $P(S_1) = \frac{1}{3}$ خواهد بود.

سوال: در پرتاب یک نوع سکه خاص احتمال پشت آمدن ۳ برابر احتمال رو آمدن است. احتمال هر کدام از حالات سکه را حساب کنید.

$$S = \{\text{پشت}, \text{رو}\} \quad \text{و} \quad P(\text{پشت}) = 3P(\text{رو})$$

بگیریم $P(\text{رو}) = x$ ، در نتیجه $P(\text{پشت}) = 3x$ خواهد بود. داریم:

$$P(\text{پشت}) + P(\text{رو}) = 1 \rightarrow 3x + x = 1 \Rightarrow 4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

بنابراین $P(\text{رو}) = \frac{1}{4}$ و $P(\text{پشت}) = \frac{3}{4}$ است.

(2)



سؤال: در یک مسابقه‌ی چهار جانبه فوتبال، تیم‌ها a, b, c, d حضور دارند.
اگر احتمال قهرمانی تیم‌های a, b, c با هم برابر باشند ولی احتمال قهرمانی تیم d دو برابر هر یک از تیم‌های دیگر باشد، احتمال قهرمانی هر یک از تیم‌ها را بیابید.

پسیم $P(a) = P(b) = P(c) = x$ و در نتیجه $P(d) = 2x$ است.

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1 \rightarrow x + x + x + 2x = 1 \Rightarrow 5x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

بنابراین: $P(a) = P(b) = P(c) = \frac{1}{5}$ و $P(d) = \frac{2}{5}$ می‌باشد.

سؤال: یک تاس به گونه‌ای ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد زوج، سه برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در پرتاب این تاس، احتمال مشاهده‌ی اعداد ۲ یا ۳ را حساب کنید.

فرض کنید $P(1) = P(3) = P(5) = x$ ، در نتیجه $P(2) = P(4) = P(6) = 3x$ ، بنابراین:

$$P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 1 \rightarrow x + 3x + x + 3x + x + 3x = 1 \Rightarrow 12x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{12}$$

لذا، نتایج گفت: $P(\{2, 3\}) = P(2) + P(3) = 3x + x = 4x = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

سؤال: در یک تجربه تصادفی، $S = \{x, y, z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(x), P(y)$ و $P(z)$ یک دنباله حسابی با قدر نسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع هر کدام از این پدیده‌ها را به دست آورید.

دنباله‌ی حسابی $P(x), P(y), P(z)$ با قدر نسبت $\frac{1}{4}$ در نظر بگیریم. فرض شود نگاه $P(x) = a$ داشته باشیم. $P(y) = a + \frac{1}{4}$ و $P(z) = a + \frac{2}{4}$ بوده و خواهیم داشت:

$$P(x) + P(y) + P(z) = 1 \rightarrow a + a + \frac{1}{4} + a + \frac{2}{4} = 1 \Rightarrow 3a = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{12}$$

در نتیجه: $P(x) = \frac{1}{12}$ و $P(y) = \frac{1}{3}$ و $P(z) = \frac{5}{12}$

ملاسعدی @sinxcosx



09168324500

(3)

تقریب (۱) در یک آزمایش تصادفی، $S = \{x, y, z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(\{x, y\}) = \frac{2}{3}$ و $P(\{x, z\}) = \frac{1}{2}$ ، احتمال وقوع هر یک از پیغام‌های شماره را به دست آورید.

$$P(x) + P(y) = \frac{2}{3} \quad \text{و} \quad P(x) + P(z) = \frac{1}{2} \quad \xrightarrow{+} \quad P(x) + P(y) + P(x) + P(z) = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow P(x) = \frac{5}{6} - 1 = \frac{1}{6}$$

$$P(x) + P(y) = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{1}{6} + P(y) = \frac{2}{3} \Rightarrow P(y) = \frac{1}{2}$$

$$P(x) + P(z) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{6} + P(z) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(z) = \frac{1}{3}$$

تقریب (۲) سه اسب a ، b و c با هم مسابقه می‌دهند. فرض کنید احتمال برد a دو برابر احتمال برد b و احتمال برد b دو برابر احتمال برد c باشد. احتمال این که a یا b برنده شوند چقدر است؟

$$P(a) = 2P(b) \quad \text{و} \quad P(b) = 2P(c)$$

ببینیم $P(c) = x$ در نتیجه $P(b) = 2x$ و $P(a) = 4x$ است.

$$P(a) + P(b) + P(c) = 1 \rightarrow 4x + 2x + x = 1 \Rightarrow 7x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$$

$$P(\{a, b\}) = P(a) + P(b) = 4x + 2x = 6x = \frac{6}{7}$$

تقریب (۳) دو مرد و سه زن در مسابقه شطرنج با کامپیوتر شرکت دارند و احتمال برنده شدن هر مرد دو برابر احتمال برنده شدن هر زن است. احتمال این که در این مسابقه یک زن برنده شود چقدر است؟

مردها را m_1 و m_2 و زن‌ها را z_1 و z_2 و z_3 نام‌گذاری می‌کنیم.



بافرض $P(z_1) = P(z_2) = P(z_3) = x$ داریم $P(m_1) = P(m_2) = 2x$

$$P(z_1) + P(z_2) + P(z_3) + P(m_1) + P(m_2) = 1 \rightarrow x + x + x + 2x + 2x = 1$$

$$\Rightarrow 7x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow P(\{z_1, z_2, z_3\}) = P(z_1) + P(z_2) + P(z_3) = x + x + x = 3x = \frac{3}{7}$$

تقریب (۴) تاسی چنان ساخته شده که احتمال روشن هر وجه متناسب با عدد روی آن وجه باشد، احتمال روشن یک عدد اول چقدر است؟

بافتوجه به فرض سؤال، اگر $P(1) = x$ ، آنگاه $P(2) = 2x$ ، $P(3) = 3x$ و ... و $P(6) = 6x$ خواهد بود.

$$P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 1 \rightarrow x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 1 \Rightarrow 21x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{21}$$

$$P(\{2, 3, 4\}) = P(2) + P(3) + P(4) = 2x + 3x + 4x = 9x = \frac{9}{21}$$

تقریب (۵) اگر $S = \{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی و $A = \{a, b\}$ ، $B = \{a, b, c, d\}$ و $C = \{a, b, e\}$ سه پیشامد باشند به طوری که $P(A) = \frac{2}{5}$ و $P(B) = \frac{3}{5}$ ، مقدار $P(C')$ را بدست آورید.

$$P(S) = P(B) + P(e) \rightarrow 1 = \frac{3}{5} + P(e) \Rightarrow P(e) = \frac{2}{5}$$

$$P(C) = P(A) + P(e) = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

$$P(C') = 1 - P(C) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

ملاسعدی @sinxcosx



09168324500

(5)

تمرین (۶) فضا نمونه‌ای آزمایشی $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ است. اگر احتمال پشامدها ساده

$P(i) = \frac{\binom{5}{i}}{n}$ باشد، احتمال اینکه عدد کمتر از ۳ باشد چقدر است؟

$$P(1) = \frac{\binom{5}{1}}{n}, P(2) = \frac{\binom{5}{2}}{n}, \dots, P(5) = \frac{\binom{5}{5}}{n} \rightarrow \frac{\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \dots + \binom{5}{5}}{n} = 1$$

از طرفی می‌دانیم $\binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \dots + \binom{k}{k} = 2^k$ است، بنابراین:

$$\frac{2^5}{n} = 1 \Rightarrow n = 32$$

$$P(\{1, 2\}) = P(1) + P(2) = \frac{\binom{5}{1}}{n} + \frac{\binom{5}{2}}{n} = \frac{5 + 10}{32} = \frac{15}{32}$$

توجه: در محاسباتی $\binom{5}{1} + \dots + \binom{5}{5}$ می‌توانید تک تک حاصل هر یک را یافته و جمع نمود.

تمرین (۷) یک تاس طوری طراحی شده که احتمال رخ دادن عدد x در آن $\frac{|7-2x|}{a}$ است. با چه احتمالی این تاس k می‌آید؟

www.my-dars.ir

طبق فرض سوال داریم:

$$P(1) = \frac{6}{a}, P(2) = \frac{3}{a}, P(3) = \frac{1}{a}, P(4) = \frac{1}{a}, P(5) = \frac{3}{a}, P(6) = \frac{6}{a}$$

حال مجموع این احتمالات باید برابر ۱ شود:

$$\frac{6}{a} + \frac{3}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{3}{a} + \frac{6}{a} = 1 \Rightarrow \frac{18}{a} = 1 \Rightarrow a = 18$$

$$P(4) = \frac{1}{18} = \frac{1}{18}$$

(6)



تمرین (۸) چهار دایره هم مرکز به شعاع 1 و 2 و 3 و 4 را در نظر بگیرید. اگر احتمال برخورد دایره به هر منطقه متناسب با مساحت آن منطقه باشد، احتمال برخورد دایره به منطقه 2 را حساب کنید.

$$P(1) = \pi x \rightarrow \text{مساحت دایره به شعاع } 1 = \pi = 1^2 \pi = \pi$$

$$P(2) = 3\pi x \rightarrow \text{مساحت دایره به شعاع } 2 = 4\pi - \pi = 3\pi$$

$$P(3) = 5\pi x \rightarrow \text{مساحت دایره به شعاع } 3 = 9\pi - 4\pi = 5\pi$$

$$P(4) = 7\pi x \rightarrow \text{مساحت دایره به شعاع } 4 = 16\pi - 9\pi = 7\pi$$

مجموع احتمال باید برابر ۱ شود:

$$\pi x + 3\pi x + 5\pi x + 7\pi x = 1 \Rightarrow 16\pi x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{16\pi}$$

$$P(3) = 5\pi x = 5\pi \times \frac{1}{16\pi} = \frac{5}{16}$$

تمرین (۹) یک محصول غذایی حداکثر بعد از ۵ روز خراب می شود. اگر احتمال خرابی در روز k ام برابر $x(2k+1)$ محاسبه شده باشد، احتمال آن که این محصول در ۳ روز اول سالم بماند چقدر است؟

طبق فرض مسئله احتمال خرابی در روزهای اول تا پنجم برابر است با:

$$P(1) = 3x \quad \text{و} \quad P(2) = 5x \quad \text{و} \quad P(3) = 7x \quad \text{و} \quad P(4) = 9x \quad \text{و} \quad P(5) = 11x$$

که مجموع آنها باید برابر ۱ شود:

$$3x + 5x + 7x + 9x + 11x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{35}$$

$$P(\{1, 2, 3\}) = 3x + 5x + 7x = 15x = \frac{15}{35}$$

$$\Rightarrow \text{احتمال اینکه محصول در ۳ روز اول سالم بماند} = 1 - \frac{15}{35} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$$

ملاسعدی @sinxcosx



09168324500

(7)