

فصل دوم

مناسبات

درس اول: نسبت های مثلثاتی

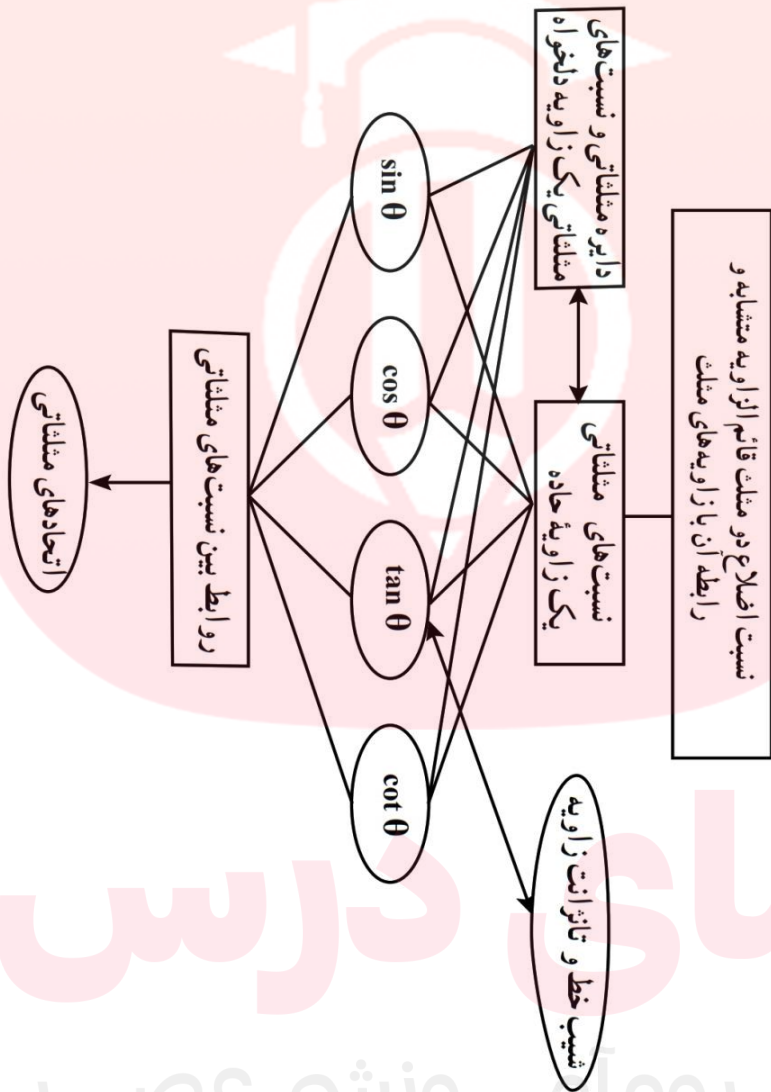
درس دوم: دایره مثلثاتی

درس سوم: روابط مثلثاتی

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

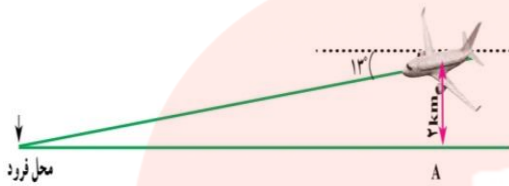


مادی داریس
گروه آموزشی عصر

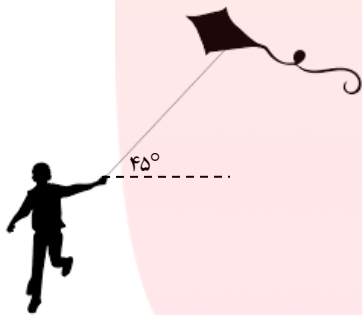
www.my-dars.ir

درس اول : نسبت های مثلثاتی

مسئله ۱: در شکل مقابل از لحظه ای که خلبان قصد می کند فرود بیاید و دهانه هواپیما را با زاویه ۱۳ درجه نسبت به افق پایین می آورد ، چند کیلومتر به صورت افقی طی می شود تا چرخ های هواپیما به زمین برسد ؟



مسئله ۲: علی با یک نخ ۱۰۰ متری بادبادکی را به هوا فرستاده است که این بادبادک با کف دست او زاویه ۴۵ درجه ساخته است . ارتفاع این بادبادک از دست او چقدر است ؟



مسئله ۳: نردبانی به فاصله ۲/۵ از دیوار به آن تکیه داده شده که با سطح زمین زاویه ۶۰ درجه ساخته است . فاصله نوک نردبان از زمین چقدر است ؟



می دانیم هر دو مثلث قائم الزاویه با یک زاویه تند برابر متشابه اند (بنا به حالت ز ز) پس در شکل زیر هر چقدر که اضلاع زاویه A را بزرگ تر کنیم ، مثلث های قائم الزاویه پدید آمده همگی با هم متشابه هستند . بنابر این :

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow$$

$\frac{DE}{AD} = \frac{BC}{AB} \rightarrow$	ضلع مقابل زاویه A
$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \rightarrow$	ضلع مجاور زاویه A
$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \rightarrow$	ضلع مجاور زاویه A
$\frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC} \rightarrow$	وتر
$\frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC} \rightarrow$	ضلع مقابل زاویه A
$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \rightarrow$	وتر

نتیجه: دیدیم که در مثلث قائم الزاویه برای زاویه معین A :

الف) نسبت طول ضلع مقابل زاویه A ، به طول وتر همواره عدد ثابتی است . این نسبت را سینوس زاویه A می نامند و آن را با $\sin A$ نمایش می دهند .

$$\sin A = \frac{\text{ضلع مقابل زاویه } A}{\text{وتر}}$$

ب) نسبت طول ضلع مجاور زاویه A ، به طول وتر همواره عدد ثابتی است . این نسبت را کسینوس زاویه A می نامند و آن را با $\cos A$ نمایش می دهند .

$$\cos A = \frac{\text{ضلع مجاور زاویه } A}{\text{وتر}}$$

ج) نسبت طول ضلع مقابل زاویه A ، به طول ضلع مجاور آن همواره عدد ثابتی است . این نسبت را تانژانت زاویه A می نامند و آن را با $\tan A$ نمایش می دهند .

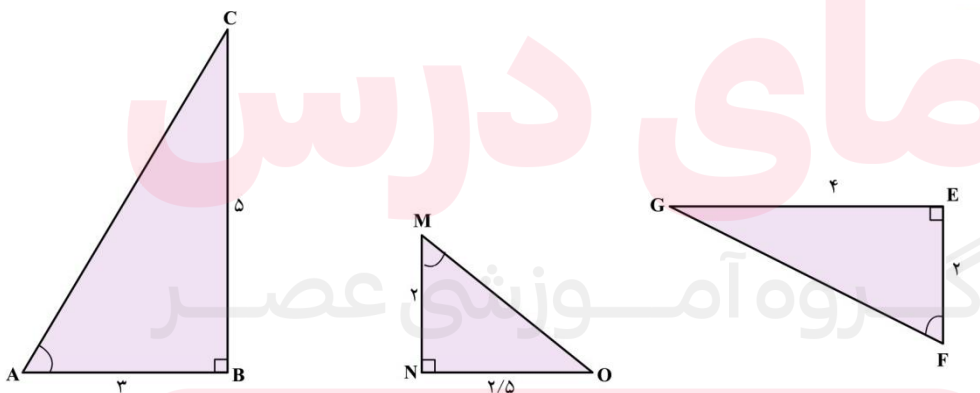
$$\tan A = \frac{\text{ضلع مقابل زاویه } A}{\text{ضلع مجاور زاویه } A}$$

د) عکس نسبت قبل یعنی ، نسبت طول ضلع مجاور زاویه A ، به طول ضلع مقابل آن را کتانژانت زاویه A می نامند و آن را با $\cot A$ نمایش می دهند .

$$\cot A = \frac{\text{ضلع مجاور زاویه } A}{\text{ضلع مقابل زاویه } A}$$

نتیجه: $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$, $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

سوال: در هر یک از شکل های زیر جاهای خالی را پر کنید .



$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{3}$ $\cot M = \frac{MN}{NO} = \frac{2}{2.5}$ $\tan F = \frac{GE}{EF} = \frac{4}{2}$

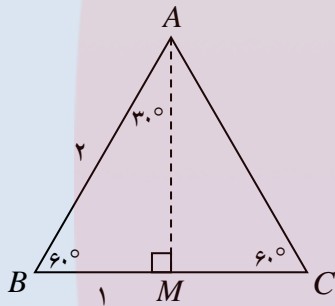
$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$ $\tan M = \frac{NO}{MN} = \frac{2.5}{2}$ $\cot F = \frac{EF}{GE} = \frac{2}{4}$

نسبت های مثلثاتی زاویه های $۶۰^\circ, ۴۵^\circ, ۳۰^\circ$:

گفتیم که نسبت های مثلثاتی هر زاویه ای ثابت هستند و به اندازه اضلاع مثلث بستگی ندارند ، حال می خواهیم برای سه زاویه ذکر شده ، مقدار نسبت های مثلثاتی را بدست آوریم :

با رسم مثلث متساوی الاضلاعی به طول ضلع ۲ (یا هر طول دیگر) داریم :

$$AM = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$



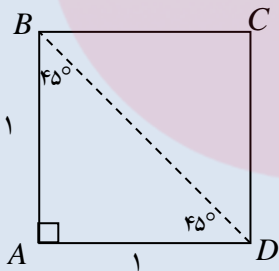
$$\sin 60^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AM}{BM} = \sqrt{3}, \quad \cot 60^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \cot 30^\circ = \frac{AM}{BM} = \sqrt{3}$$

با رسم مربعی به طول ضلع ۱ (یا هر طول دیگر) داریم :



$$AM = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{AB}{BD} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{1} = 1, \quad \cot 45^\circ = \frac{AB}{AD} = \frac{1}{1} = 1$$

در نتیجه :

	۳۰°	۴۵°	۶۰°
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
$\cot \theta$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

سوال : مسائل اول فصل را حل کنید .

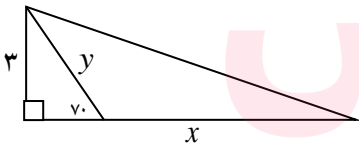
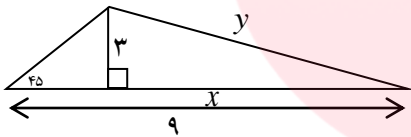
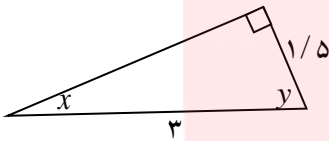
سوال : حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف) $\sin 30^\circ \tan 30^\circ =$

ب) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 60^\circ =$

ج) $2 \sin^2 45^\circ - \cot^2 45^\circ =$

سوال : مقدار x, y را بیابید . ($\sin 70^\circ = 0/94$ و $\cos 70^\circ = 0/34$ و $\tan 70^\circ = 2/75$)

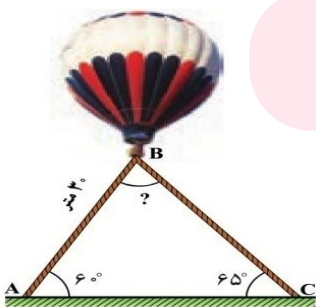


مای درسی

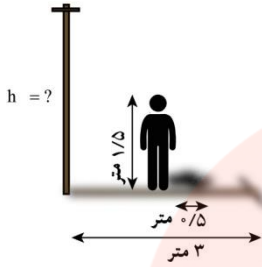
گروه آموزشی عصر

سوال : بالنی با دو طناب به صورت شکل زیر به زمین وصل شده است. طول طناب دوم را بیابید . ($\sin 60^\circ = 0/87, \sin 65^\circ = 0/91$)

www.my-dars.ir

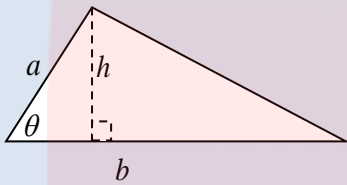


سوال : فردی با قد $1/5$ متر در کنار تیر برقی ایستاده است . طول سایه شخص $0/5$ متر و طول سایه درخت 3 متر است . طول درخت را حساب کنید .



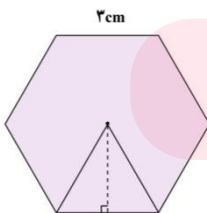
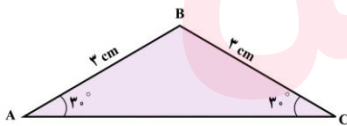
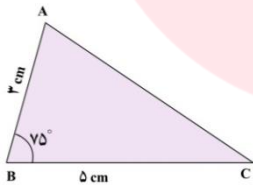
مساحت مثلث با داشتن دو ضلع و زاویه بین آن ها :

برای یافتن مساحت مثلث می دانیم نیاز به ارتفاع داریم ولی ارتفاع داده نشده است حال هدف این است که به کمک مثلثات ارتفاع را حساب کنیم :



$$S = \frac{1}{2}hb \xrightarrow{\sin \theta = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \sin \theta} S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$$

سوال : مساحت شکل های زیر را بیابید



www.my-dars.ir

درس دوم : دایره مثلثاتی

دایره مثلثاتی : دایره ای به شعاع ۱ است . که نقطه A مبدأ حرکت برای رسم زاویه است.

جهت مثبت حرکت زاویه خلاف ساعت گرد و جهت منفی ، ساعت گرد است .

با رسم یک عمود از نقطه P به محور x مثلث قائم الزاویه ای تشکیل می شود که طول وتر

آن ۱ است ، بنابر این طبق تعریف نسبت های مثلثاتی داریم :

$$\sin \theta = PQ \quad \text{و} \quad \cos \theta = OQ$$

در نتیجه :

الف) اگر P نقطه ای روی دایره مثلثاتی باشد مختصات آن به صورت $P(\cos \theta, \sin \theta)$

ب) در ضمن می توان گفت همواره : $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ ، $-1 \leq \cos \theta \leq 1$

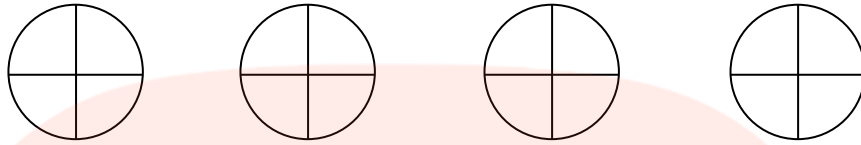
ج) علامت نسبت های مثلثاتی در ربع های مختلف به صورت زیر خواهد بود:

	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$
ربع اول	+	+	+	+
ربع دوم	+	-	-	-
ربع سوم	-	-	+	+
ربع چهارم	-	+	-	-

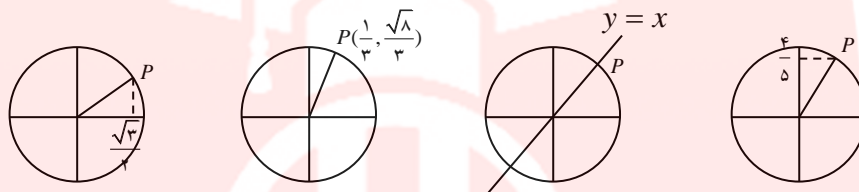
د) با توجه به دایره مثلثاتی ، نسبت های مثلثاتی زاویه های مرزی بین ربع ها را می توان به صورت زیر نوشت :

	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin \theta$	۰	۱	۰	-۱	۰
$\cos \theta$	۱	۰	-۱	۰	۱
$\tan \theta$	۰	ت ن	۰	ت ن	۰
$\cot \theta$	ت ن	۰	ت ن	۰	ت ن

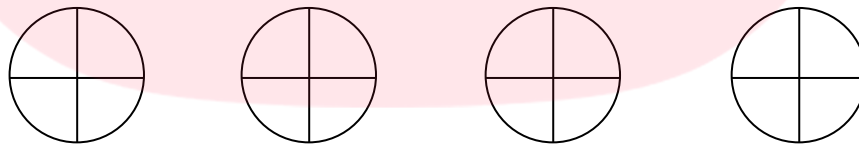
سوال : زاویه های $۲۷۰, -۱۲۰, ۱۲۵, -۲۲۵$ روی دایره مثلثاتی مشخص کنید .



سوال : نسبت های مثلثاتی زاویه مشخص شده را بیابید .



سوال : نسبت های مثلثاتی زاویه های $۱۲۰, ۳۰۰, -۲۲۵, -۱۳۵$ را با توجه به زاویه های متناظر آنها در ربع اول، بیابید .



مای درسی

گروه آموزشی عصر

سوال : در هر مورد α در کدام ربع قرار دارد ؟

(ب) $\sin \alpha \cos \alpha < 0$

(الف) $\cos \alpha < 0, \sin \alpha > 0$

www.my-dars.ir

(د) $\cot \alpha, \tan \alpha$ هم علامت

(ج) $\tan \alpha \sin \alpha > 0$

سوال : اگر $\sin \alpha = \frac{2m-3}{5}$ باشد ، حدود m را بیابید .

سوال : اگر $180 < \alpha < 270$ و $\sin \alpha = \frac{2m+1}{3}$ باشد ، حدود m را بیابید .

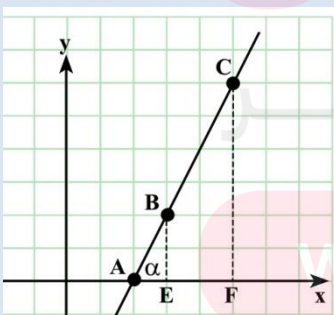
سوال : اگر $90 < \alpha < 180$ و $\cos \alpha = \frac{m-1}{2}$ باشد ، حدود m را بیابید .

سوال : حاصل عبارت زیر را بیابید .

$$\frac{\sin^2 \cdot \cos^2 \cdot \cos 180 + 2}{\sin 27 \cdot \cos^2 180 + \cos 90}$$

مای درسی

رابطه شیب خط با تانژانت :



در سال های گذشته با داشتن دو نقطه از خط دیدیم که شیب خط به

$$m = \frac{\text{تفاضل عرض ها}}{\text{تفاضل طول ها}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{BE}{AE}$$

صورت مقابل بدست می آید :

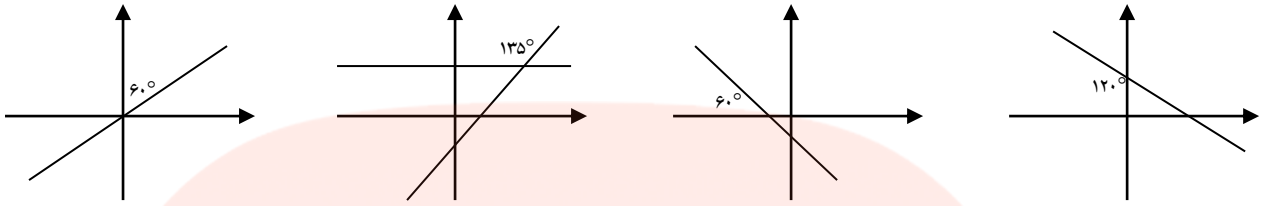
$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل زاویه}}{\text{ضلع مجاور زاویه}} = \frac{BE}{AE}$$

از طرفی طبق تعریف تانژانت داریم :

بنابر این می توان گفت :

اگر خطی با جهت مثبت محور x زاویه α بسازد ، آنگاه شیب خط برابر است با : $m = \tan \alpha$

سوال : شیب خط های زیر را بیابید .



سوال : هرکدام از خط های زیر با راستای مثبت محور ، چه زاویه ای می سازد ؟

ج) $\sqrt{3}y - 3x + 1 = 0$

ب) $\sqrt{3}y - x = 1$

الف) $x + y = 2$

سوال : معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(0, 3)$ گذشته و با راستای مثبت محور x زاویه 60 درجه بسازد .

سوال : معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(-2, 3)$ گذشته و با راستای مثبت محور x زاویه 45 درجه بسازد .

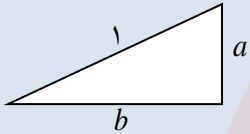
مای درسی
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

درس سوم : روابط مثلثاتی

دیدیم که برای هر زاویه معین نسبت های مثلثاتی ثابت است و به طول اضلاع زاویه بستگی ندارد .

پس با رسم یک مثلث قائم الزاویه به طول وتر ۱ و با کمک قضیه فیثاغورس داریم :



$$\left. \begin{array}{l} \sin \theta = a \\ \cos \theta = b \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta \\ 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta \end{cases}$$

به راحتی با تقسیم دو طرف رابطه بالا در $\cos^2 \theta$ و $\sin^2 \theta$ به ترتیب به فرمول های زیر می رسیم :

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow \boxed{1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}}$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \Rightarrow \boxed{1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}}$$

سوال : اگر $\sin \alpha = \frac{5}{7}$ و α ربع دوم باشد ، نسبت های مثلثاتی دیگر زاویه α را حساب کنید .

سوال : اگر $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ و $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ باشد ، نسبت های مثلثاتی دیگر زاویه α را حساب کنید .

مای درس

سوال : اگر $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ و α ربع سوم باشد ، نسبت های مثلثاتی دیگر زاویه α را حساب کنید .

www.my-dars.ir

سوال : درستی روابط زیر را بررسی کنید .

الف) $\frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta}$

ب) $(\frac{1}{\cos x} + \tan x)(1 - \sin x) = \cos x$

ج) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

د) $1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x$

ه) $\sin^2 \theta = \frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$

و) $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$

ز) $\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \tan \alpha$

مای درسی

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir