بسمه تعالی

امتحانات نیمسال دوم

نام:	آزمون درس: حسابان۱	تاریخ آزمون: ۰۳/۰۸/
نام خانوادگی:	تعداد صفحه: ۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه
کلاس:	پایه: یازدهم رشته: ریاضی	سرکارخانم : مهدی عباسی
نمره به عدد:	نمره به حروف:	امضای دبیر:
توضیحات دبیر:	درصورت استفاده از هر فرمول خاص، نوشتن آن الزامی است.	

شماره	سوالات	بارم
۱	به ازای کدام مجموعه از a الف) نمودار $y=(a-1)x^2+2\sqrt{2}x+a$ همواره بالای محور xها است ؟ ب) معادله‌ی خط محور تقارن سهمی $-2x^2+6x^2+1$ را تعیین کنید.	۱.۵
۲	تعداد ریشه‌های معادله‌ی زیر را بیابید . $x^4-4x^2-12=0$	۱.۵
۳	ضابطه‌ی وارون تابع ، $f(x)=2-\sqrt{x-1}$ را یافته و دامنه‌ای از f^{-1}را اعلام کنید که این دو تابع وارون یکدیگرند.	۱.۵

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

۴	گر $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ و $(fog)_{(x)}=\frac{x^2+2}{x^2+1}$ باشند ، $g(1)$ را بیابید .	۱.۵
۵	دامنه‌ی تابع زیر را بیابید . $y=\sqrt{2-\log_3(x+1)}$	۱.۵
۶	از تساوی $\log(2x-1)+\frac{1}{2}\log x^2=\log 3$ ، مقدار لگاریتم $\frac{x}{3}$ در مبنای ۴ کدام است ؟	۱.۵
۷	اگر $\tan 35=0.7$ باشد، حاصل عبارت زیر رابیابید. $A=\frac{2\sin 125^\circ-\cos 235^\circ}{\cos 215^\circ+\sin(-35^\circ)}$	۲.۵

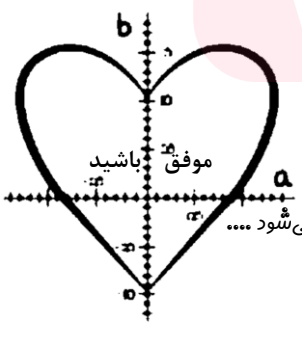
مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

۸	ثابت کنید : $\frac{4\cos 2x}{\tan x + \cot x} = \sin 4x$	۱.۵
۹	تابع $y = -2\sin x + 1$ را در محدوده‌ی $[0.2\pi]$ رسم کرده و برد آن را بیابید .	۱
۱۰	حاصل حدهای زیر را بیابید . $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$	۳

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

	$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$	
۱	$\lim_{x\to 1} x[x]+2[-x]$	۱۱ وجود حد در تابع زیر را بررسی کنید .
۲	$f(x)=\begin{cases}\frac{[x]\sin x}{2x-\lvert x\rvert} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$	۱۲ به ازای کدام a تابع زیر پیوستگی چپ دارد ؟

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir



می‌نشینی چند تمرین ریاضی حل کنی
خط کش و نقاله و پرگار عاشق می‌شود ....

$a^2+(b-\sqrt[3]{a^2})^2=\heartsuit$

① به ازای کدام مجموعه از a الف) نمودار $y=(a-1)x^2+2\sqrt{2}x+a$ همواره بالای محور x هاست؟

ب) معادله‌ی خط محور تقارن سهمی $-2x^3+6x^2+1$ را تعیین کنید.

پاسخ:

الف) برای این که یک سهمی همواره بالای محور x ها باشد (در معادله‌ی آن ضریب x^2 باید مثبت باشد (تا سهمی رو به بالا باشد) و همین طور Δ باید منفی باشد (تا سهمی در هیچ نقطه‌ای محور x ها را قطع نکند.)

$a-1>0 \longrightarrow a>1$

$\Delta<0 \longrightarrow 8-4a(a-1)<0$

$8-4a^2+4a<0$

$a^2-a-2>0$

$(a+1)(a-2)>0 \longrightarrow a<-1$ یا $a>2$

اشتراک جواب ها $\longleftarrow$ $\boxed{a>2}$

ب) محور تقارن سهمی خطی عمودی به طول رأس سهمی است. کافی است طول رأس سهمی را پیدا کنیم:

$x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{6}{-4}=\frac{3}{2}$ معادله خط $\longrightarrow \boxed{x=\frac{3}{2}}$

---

② تعداد ریشه‌های معادله‌ی زیر را بیابید. $x^4-4x^2-12=0$

پاسخ:

ابتدا تغییر متغیر می دهیم تا معادله به معادله‌ی درجه دوم تبدیل شود. $t=x^2$ $\longleftarrow$ $t^2-4t-12=0$

$(t+2)(t-6)=0$ $\begin{cases} t=-2 & x^2=-2 \times \\ t=6 & x^2=6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\sqrt{6} \\ x=-\sqrt{6} \end{cases}$

---

③ ضابطه‌ی وارون تابع $f(x)=2-\sqrt{x-1}$ را یافته و دامنه‌ای از f را اعلام کنید که این دو تابع وارون یکدیگرند.

پاسخ:

برای یافتن وارون تابع باید x را برحسب y به دست آوریم.

گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
مای درس
CamScanner
CamScanner

$y = 2 - \sqrt{x-1}$

برد تابع f یا دامنه تابع f^{-1} : $y \leq 2$

بتوان $\rightarrow$ $2 - y = \sqrt{x-1} \longrightarrow 2 - y \geq 0$

$y^2 - 4y + 4 = x - 1$ $\qquad x = y^2 - 4y + 5$

$\boxed{f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5 \quad (x \leq 2)}$ حالا برای نوشتن ضابطه‌ی نهایی تابع f^{-1} جای x و y را عوض می‌کنیم.

---

(۴) اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $fog(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ باشند، $g(1)$ را بیابید.

پاسخ:

$g(1) = a$

$fog(x)$ طبق ضابطه $\longrightarrow$ $fog(1) = f(a) = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$

$f(x)$ طبق ضابطه $\longrightarrow$ $f(a) = \frac{a+1}{a-1}$

$\Rightarrow \frac{a+1}{a-1} = \frac{3}{2}$ $\qquad 2a + 2 = 3a - 3$

$\boxed{a = 5}$

---

(۵) دامنه‌ی تابع زیر را بیابید.

$y = \sqrt{2 - \log_3(x+1)}$

پاسخ: عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌تر مساوی صفر باشد. $\longleftarrow$

$2 - \log_3(x+1) \geq 0$

$\log_3(x+1) \leq 2$

$\log_3(x+1) \leq \log_3 9$ $\qquad x+1 \leq 9$ $\qquad x \leq 8$

در عبارت $\log_3(x+1)$، $x+1$ باید بزرگ‌تر از صفر باشد $\longleftarrow$

$x+1 > 0$ $\qquad x > -1$

اشتراک دو شرط $\Longleftarrow$ $-1 < x \leq 8$ یا $x \in (-1, 8]$

$\underline{D_f = (-1, 8]}$

---

(۶) از تساوی $\log 3 = \log x^2 + \frac{1}{2}\log(2x-1)$، مقدار لگاریتم $\frac{x}{3}$ در مبنای ۴ کدام است؟

$\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases}$

پاسخ:

$\log(2x-1) + \frac{1}{2}\log x^2 = \log 3$ $\qquad 2x^2 - x = 3$

$\log(2x-1) + \log x = \log 3$ $\qquad 2x^2 - x - 3 = 0$

$\log x(2x-1) = \log 3$ $\qquad (x+1)(2x-3) = 0$

$x = -1$ ✗ $\qquad x = \frac{3}{2}$

در دامنه نیست

$\log_4 \frac{x}{3} = \log_4 \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
CamScanner
CamScanner

⑦ اگر $\tan 25^\circ = 0/7$ حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A = \frac{2\sin 125^\circ - \cos 245^\circ}{\cos 215^\circ + \sin(-35^\circ)}$$

پاسخ:

$$A = \frac{2\sin(90+35) - \cos(270-35)}{\cos(180+35) + \sin(-35)} = \frac{2\cos 35 - (-\sin 35)}{-\cos 35 - \sin 35} = \frac{2\cos 35 + \sin 35}{-\cos 35 - \sin 35}$$

صورت و مخرج را تقسیم بر $\cos 35$ می‌کنیم.

$$\frac{2\frac{\cos 35}{\cos 35} + \frac{\sin 35}{\cos 35}}{-\frac{\cos 35}{\cos 35} - \frac{\sin 35}{\cos 35}} = \frac{2+\tan 35}{-1-\tan 35} = \frac{2+0/7}{-1-0/7} = \frac{2/7}{-1/7} = -\frac{27}{17}$$

---

⑧ ثابت کنید:

$$\frac{4\cos^2 x}{\tan x + \cot x} = \sin 4x$$

پاسخ: از سمت چپ شروع می‌کنیم و آن را به عبارت سمت راست تبدیل می‌کنیم.

$$\frac{4\cos^2 x}{\tan x + \cot x} = \frac{4(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{4(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x}}$$

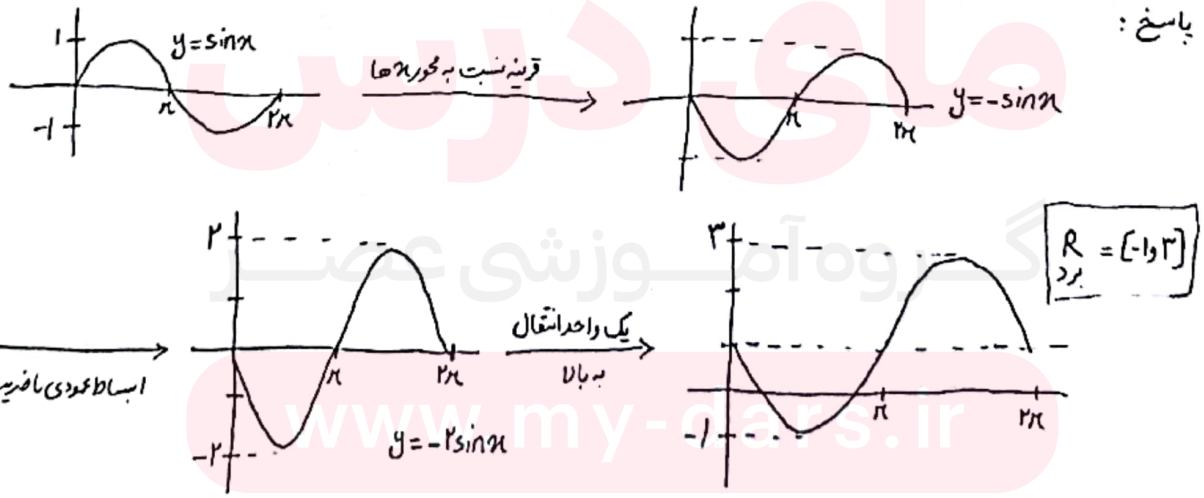
$$= \frac{4(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\frac{1}{\cos x \sin x}} = 4\cos 2x \cdot \cos x \sin x = 2\cos 2x \cdot 2\sin x \cos x = 2\cos 2x \sin 2x$$

$$= \sin 4x$$

---

⑨ تابع $y = -2\sin x + 1$ را در محدوده‌ی $[0, 2\pi]$ رسم کرده و برد آن را بیابید.

پاسخ:



ماذرس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
CamScanner
CamScanner

(۱۰) حاصل حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{12}} \frac{\sin 2x - 1}{\cos^2(x+\frac{\pi}{12})}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{12}} \frac{\sin 2x - 1}{\cos^2(x+\frac{\pi}{12})} \overset{\star}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{12}} \frac{\sin 2x - 1}{\frac{\cos(2x+\frac{\pi}{6})+1}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{12}} \frac{\sin 2x - 1}{\frac{-\sin 2x + 1}{2}} = -2$$

$$\star \quad \cos 2t = 2\cos^2 t - 1$$
$$\cos^2 t = \frac{\cos 2t + 1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{4x+1} - 3}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{4x+1} - 3} \times \frac{\sqrt{4x+1} + 3}{\sqrt{4x+1} + 3} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)(x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}{4x+1-9}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)(x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)} = \frac{3\times 6}{4} = \frac{9}{2} = 4.5$$

---

(۱۱) وجود حد در تابع زیر را بررسی کنید.

$$\lim_{x\to 1} x[x] + 2[-x]$$

پاسخ: برای این که حد موجود باشد باید حد راست و چپ در نقطه ۱ موجود و برابر باشند.

$$\lim_{x\to 1^+} x[x] + 2[-x] = \lim_{x\to 1^+} x - 4 = 1 - 4 = -3$$

حدهای راست و چپ در $x=1$ برابر نیستند پس تابع در این نقطه حد ندارد.

$$\lim_{x\to 1^-} x[x] + 2[-x] = \lim_{x\to 1^-} 0 + (-2) = -2$$

---

(۱۲) به ازای کدام a تابع زیر پیوستگی دارد؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{[x]\sin x}{2x - |x|} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

پاسخ: برای این که تابع پیوسته باشد باید مقدار و حد تابع در نقطه‌ی صفر برابر باشند.

از آن جا که در $x=0$ حدهای راست و چپ برابر نیستند پس تابع در این نقطه حد ندارد و به ازای هیچ مقداری از a پیوسته نیست.

$$f(0) = a$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{0 \times \sin x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{-\sin x}{3x} \overset{\star}{=} -\frac{1}{3} \qquad \star \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

www.my-dars.ir
CamScanner
CamScanner