

« آنچه از مباحث فصل سوم ریاضی هفتم آموخته ام »

جبر و معادله

نکته ۱- تبدیل مسائل زندگی روزمره به عبارت ها و معادله های ریاضی را مدل سازی می گویند.

مثال: هزینه کرایه یک اتوبوس عبارت است از یک قیمت ثابت برای ۳ ساعت اول و یک قیمت برای هر ساعت اضافه بعد از ۳ ساعت؛ بنابراین می توان هزینه اتوبوس را به صورت یک عبارت جبری به صورت:

$$C = atnb \quad \text{نمایش داد، حروف } a, b, n \text{ به چه معنی هستند؟}$$

حل مسئله - هزینه سه ساعت $a =$ هزینه کرایه اتوبوس $C =$

تعداد ساعات اضافه $n =$ قیمت هر ساعت اضافه $b =$

نکته ۲- جبر و معادله:

یک عبارت جبری، شامل یک یا چند عدد و متغیر و عملیات ریاضی مانند: جمع، تفریق، ضرب و تقسیم است.

مثال: عبارت های رو به رو جبری هستند. abc و $x + 2y - z$ و $8a$

نکته ۳- عبارت هایی که در آن ها فقط از اعداد و حروف و عمل ضرب استفاده شده باشد، یک جمله ای هستند. به قسمت عددی، ضریب و به قسمت حرفی، قسمت موهومی گفته می شود.

مثال: این عبارت ها همه یک جمله هستند. 125 و $\frac{3ax}{2}$ و $\sqrt{2ab}$ و $4xyz$ و $5x$

اما عبارت هایی مانند عبارت های رو به رو یک جمله ای نیستند زیرا در آن ها جمع یا تفریق وجود دارد.

$$5x - 4 \quad \text{و} \quad \frac{a+1}{b} \quad \text{و} \quad a+b$$

اگر ضریب عددی ۱ باشد، می توانیم آن را ننویسیم. مثال: $1a = a$

نکته ۴- محیط یک مربع به ضلع a برابر با $4a = 4 \times a$ است. حرف a یک متغیر نامیده می شود. در جبر و متغیرها، نمادهایی برای بیان عددهای نامعلوم یا مقادیر غیر مشخص اند.

$a = 2$
$P = 4a \implies P = 4 \times 2 = 8$

۲

نکته ۵- عمل جمع خاصیت جابه جایی دارد یعنی $a + b = b + a$ است.

- $1 \times a = a$ هر عددی مساوی خود آن عدد است.

- $a \times b = b \times a$ ضرب خاصیت جابه جایی دارد.

- $a + 0 = a$ هر عدد + 0 برابر خودش است.

نکته ۶- یک عبارت جبری شامل یک یا چند عدد؛ متغیر و عمل هایی مثل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم است.

مثال: $3x - 7$ $5z$ $m \times 5n$ $4 + \frac{p}{g}$

در یک عبارت جبری، اغلب از علامت « ۰ » یا پرانتز برای حاصل ضرب بین آن ها استفاده می شود و از نماد « X » پرهیز می شود؛ زیرا ممکن است علامت ضرب با نماد انگلیسی « X » به عنوان یک متغیر اشتباه شود. در زیر حاصل ضرب دو متغیر X و Y را به صورت های مختلف نمایش داده ایم که همگی آن ها، یکسان اند و هیچ فرقی با یکدیگر ندارند:

$$xy, x \cdot y, x(y), (x)y, (x)(y)$$

نکته ۷- هر عبارت از تعدادی جمله جبری تشکیل شده است.

نکته ۸- هر جمله جبری شامل قسمت عددی و قسمت حرفی است که بین آن ها علامت ضرب می باشد. $5 \times b$

نکته ۹- یک جمله ای های متشابه:

- جملات متشابه جملاتی هستند که قسمت حرفی آن ها عین هم باشد. $5x$ و $6x$

- فقط جملات متشابه می توانند با هم جمع و تفریق شوند. $2x + 5x = 7x$

- اگر قسمت حرفی یا موهومی چند یک جمله ای دقیقاً مثل هم باشد، به آن ها متشابه می گوئیم.

$$7ab \text{ و } 10ab \text{ و } 13ba \text{ و } \frac{3}{5}ab$$

www.my-dars.ir

اما عبارت های روبرو متشابه نیستند. $7ab$ و $7b$ و $7a$

نکته ۱۰- ساده کردن عبارت های جبری:

برای ساده کردن عبارت های جبری فقط جمله های متشابه را با هم در نظر می گیریم و آن ها را با هم جمع و تفریق می کنیم، در ساده کردن یک عبارت جبری، استفاده از قوانین مربوط به اعمال مانند: ضرب عددهای منفی در مثبت، منفی در منفی، مثبت در مثبت باید رعایت شود. مثال: $8a + 5a - 3a + 10a$

$$8a + 5a - 3a + 10a = (8 + 5 - 3 + 10) a = 20a \quad \text{حل مسئله -}$$

نکته ۱۱- ساده کردن عبارت های جبری یعنی کوتاه کردن طول عبارت یا کم کردن تعداد جملات.

$$5ab - 4ab = (5 - 4) ab = 3ab \quad \text{مثال:}$$

نکته ۱۲- فقط وقتی چند یک جمله ای متشابه باشند، می توانیم آن ها را با هم جمع یا تفریق کنیم. در این حالت ضرایب عددی را جمع و تفریق کرده و قسمت حرفی مشترک را یک بار جلوی جواب می نویسیم.

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x - 3x = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} - 3\right)x = -2x$$

نکته ۱۳- هر کدام از عبارت ۲، a ، $3a$ ، $8b$ ، $5b$ یک جمله است. دو جمله a ، $3a$ متشابه اند؛ اما $8b$ و $3a$ متشابه نیستند برای ساده کردن عبارتهای جبری، فقط جمله های متشابه را با هم در نظر می گیریم و آن ها را با هم جمع و تفریق می کنیم در ساده کردن یک عبارت جبری، استفاده از قوانین مربوط به اعمال آن مانند: ضرب عددهای منفی در مثبت و منفی در منفی و مثبت در مثبت باید رعایت شود و خاصیت جابه جایی اعمال جمع و ضرب، خاصیت شرکت پذیری ضرب و بی اثر بودن پرانتز، $(ab)c$ ، $(bc)a$ از اهمیت زیادی برخوردار است.

- نحوه جمع کردن

$$6x + 5y - 4x + 8y = (6x - 4x) + (5y + 8y) = (6 - 4)x + (5 + 8)y = 2x + 13y$$

- نحوه ی ضرب کردن

$$3(2x + 5y) = 3 \times 2x + 3 \times 5y = 6x + 15y$$

اعداد پشت پرانتز را در تک تک جملات داخل پرانتز ضرب می کنیم سپس حاصل را که به دست آوردیم جملات متشابه را با هم جمع یا تفریق کنیم.

نکته ۱۴- هر گاه به جای متغیر یا متغیر ها، عدد یا عددهایی را قرار دهیم و اولویت در محاسبات عددی را رعایت کنیم در واقع مقدار عددی عبارت را حساب کرده ایم در انجام عملیات محاسبه مقدار عبارت، ترتیب انجام عملیات را باید رعایت کنیم.

مثال: نحوه ساختن یک عبارت عددی سپس محاسبه و رعایت ترتیب انجام عملیات

$$a - (a - 2b) \quad a = 5, \quad b = 3$$

$$5 - (5 - 2 \times 3) = 5 - (5 - 6) = 5 - (-1) = 5 + 1 = 6$$

نکته ۱۵- اگر عبارت را اول ساده کنیم بعد مقدار عددی را به دست آوریم کارمان ساده تر است.

$$3(2x-3y) - 5(x-2y) = 3 \times 2x + 3 \times (-3y) - 5 \times x - 5 \times (-2y) = 6x + (-9y) - 5x - (-10y) = x + y = 2 + 3 = 5$$

نکته ۱۶- ضرب یک جمله ای ها:

در ضرب یک جمله ای ها لازم نیست جملات متشابه باشند و همه یک جمله ای ها را می توان در هم ضرب کرد در این حالت، اعداد در هم و حروف نیز در هم ضرب می شوند.

$$(\underline{2} ac)(\underline{1} b)(\underline{9} d) = \frac{18}{18} acbd = acbd \quad \text{مثال:}$$

$$3 \quad 3 \quad 2$$

نکته ۱۷- چند جمله ای جبری:

اگر دو یا چند جمله ای غیر متشابه با هم جمع یا تفریق شوند، یک چند جمله ای جبری به وجود می آید.

$$7x - 5y + 10xy \quad \text{مثال: یک عبارت سه جمله ای}$$

نکته ۱۸- جمع و تفریق چند جمله ای ها:

در جمع و تفریق چند جمله ای ها، جملات متشابه را مشخص کرده و آن ها را جمع و تفریق می کنیم.

- اگر قبل از پرانتزی علامت منفی (-) باشد همه عبارت های داخل آن پرانتز قرینه می شوند.

$$7ab + 8bc - (4ab - 2bc) = 7ab + 8bc - 4ab + 2bc = 3ab + 10bc \quad \text{مثال:}$$

نکته ۱۹- ضرب چند جمله ای ها:

در ضرب دو چند جمله ای، هر کدام از جملات چند جمله ای اول را در هر کدام از جملات چند جمله ای دوم ضرب می کنیم و سپس جملات متشابه را با هم ساده می کنیم.

$$(a + b)(-x + y) = a - ax + ay + b - bx + by$$

نکته ۲۰- مقدار عددی یک عبارت جبری:

اگر به جای متغیرهای (حروف) یک عبارت جبری عدد بگذاریم، مقدار عددی آن عبارت به دست می آید.

مثال ۱: مقدار عددی این عبارت را به دست آورید. $a = 1$ $b = -1$ $c = 2$

$$ab = bc + 2(a + b)$$

$$ab - bc + 2(a + b) = (1)(-1) - (-1)(2) + 2(1 + (-1)) = -1 + 2 + 0 = 1$$

مثال ۲: مقدار عددی عبارت زیر را به ازای $x = 2$ و $y = -1$ و $z = 3$ به دست آورید.

$$\frac{xyz - 2(x + z)}{(x + y)(zx - xy)}$$

$$\frac{xyz - 2(x + z)}{(x + y)(zx - xy)}$$

نکته ۲۱- معادله:

به یک تساوی جبری که به ازای بعضی از عددها به تساوی عددی تبدیل می شود، معادله می گویند. جواب های معادله همان بعضی از عددها هستند که تساوی عددی را برقرار می کنند.

مثال: $4n = 12$ و $6n + 7 = 37$

معادله یک تساوی است که هدف از حل آن به دست آوردن مقدار یک یا چند مجهول می باشد. معادله

های زیر یک مجهولی هستند. $3a = 60$ $2x + 5 = 9$ $5x - 8 = 7$

- تعریف دیگر معادله: هر گاه بین دو عبارت جبری = قرار دهیم معادله ساخته ایم.

نکته ۲۲- روش های حل معادله:

برای حل یک معادله باید کاری کنیم تا در یک طرف معادله، فقط مجهول و در طرف دیگر فقط عدد باشد و با ساده کردن اعداد، مقدار مجهول را به دست آوریم.

- روش اول- به هر دو طرف یک تساوی می توانیم یک مقدار یکسان را اضافه یا از دو طرف یک تساوی یک مقدار یکسان را کم کنیم. اگر پشت معادله هر مقدار اضافه کنیم باید به جلوی معادله هم همان مقدار اضافه کنیم همچنین دو طرف یک تساوی را می توانیم در یک عدد یکسان غیر صفر ضرب و یا بر یک عدد یکسان غیر صفر تقسیم کنیم. به عبارت دیگر دو طرف تساوی را می توان با مقدار ثابتی جمع یا تفریق، ضرب یا تقسیم کرد.

مثال: این معادله را حل کنید. $5x - 3 = 32$

$$\text{حل معادله - } 5x - 3 = 32 \rightarrow 5x - 3 + 3 = 32 + 3 \rightarrow 5x = 35 \rightarrow \frac{5x}{5} = \frac{35}{5} \rightarrow x = 7$$

- روش دوم - در این روش همه مجهول ها را به یک طرف تساوی و همه معلوم ها را به طرف دیگر تساوی می بریم. هر عبارتی که از یک طرف تساوی به طرف دیگر تساوی می رود علامتش قرینه می شود.

مثال: این معادله را حل کنید. $7x + 5 = 10x - 7$

$$\text{حل معادله - } 7x + 5 = 10x - 7 \rightarrow 7x - 10x = -7 - 5 \rightarrow -3x = -12 \rightarrow x = \frac{-12}{-3} \rightarrow x = 4$$

- مقدار مجهول برابر است با عدد معلوم تقسیم بر ضریب مجهول. در مثال بالا برای بدست آوردن مقدار مجهول (X)، عدد معلوم (-۱۲) را بر ضریب مجهول (-۳) تقسیم کردیم.

- اگر معادله کسری باشد می توانیم با ضرب کردن طرفین معادله در کوچکترین مضرب مشترک مخرج ها، مخرج ها را از بین برده و معادله را حل کنیم.

$$\text{مثال: این معادله را حل کنید. } \frac{x+2}{12} + \frac{x-4}{6} = \frac{2x-12}{4}$$

حل معادله - طرفین را در ۱۲ ضرب می کنیم.

$$1 \times \frac{x+2}{12} + 2 \times \frac{x-4}{6} = 3 \times \frac{2x-12}{4} \rightarrow (x+2) + 2(x-4) = 3(2x-12) \rightarrow$$

$$x + 2 + 2x - 8 = 6x - 36 \rightarrow x + 2x - 6x = -36 - 2 + 8 \rightarrow -3x = -30 \rightarrow x = \frac{-30}{-3} \rightarrow x = 10$$

- اگر در معادله ای یک یا چند پرانتز وجود داشت، با استفاده از قانون ضرب چند جمله ای ها حاصل پرانتزها را حساب کرده پرانتزها را بر می داریم و معادله را حل می کنیم.

مثال: این معادله را حل کنید.

$$8x - 2(x + 3) = 3(x - 3)$$

$$8x - 2x - 6 = 3x - 9 \rightarrow 8x - 2x - 3x = -9 + 6 \rightarrow 3x = -3 \rightarrow x = \frac{-3}{3} \rightarrow x = -1$$

حل معادله -

نکته ۲۳- حل مسئله به کمک معادله:

برای حل یک مسئله به کمک معادله، ابتدا باید مقدار مجهول را تشخیص داده و با نام گذاری آن معادله را نوشته سپس حل کنیم.

مثال ۱: اگر به سه برابر عددی، ۷ واحد اضافه کنیم، حاصل ۳۱ می شود، آن عدد را بدست آورید.

حل مسئله - عدد را x در نظر می گیریم.

$$3x + 7 = 31 \rightarrow 3x = 31 - 7 \rightarrow 3x = 24 \rightarrow x = \frac{24}{3} = 8$$

مثال ۲: سن نیما دو برابر سن خواهرش است. بعد از سه سال مجموع سن آنها ۳۰ سال می شود. اکنون نیما چند ساله است؟

حل مسئله - اگر سن خواهر نیما را x در نظر بگیریم، سن نیما برابر با $2x$ می شود و داریم:

$$(x + 3) + (2x + 3) = 30 \rightarrow 3x + 6 = 30 \rightarrow 3x = 30 - 6 \rightarrow 3x = 24 \rightarrow x = \frac{24}{3} = 8$$

خواهر نیما ۸ سال و نیما ۱۶ سال دارد.

مثال ۳: مجموع سه عدد متوالی ۷۲ شده است آن سه عدد را پیدا کنید.

حل مسئله - اگر کوچکترین عدد را x در نظر بگیریم، داریم:

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 72 \rightarrow 3x + 3 = 72 \rightarrow 3x = 69 \rightarrow x = \frac{69}{3} = 23$$

مثال ۴: قیمت یک خودکار از دو برابر قیمت یک مداد، ۱۰۰ تومان بیشتر و از سه برابر قیمت یک مداد، ۲۰۰ تومان کمتر است. قیمت یک خودکار چقدر است؟

حل مسئله - اگر قیمت یک مداد را X در نظر بگیریم قیمت یک خودکار $(2X + 100)$ یا $(3X - 200)$ است. پس داریم:

$$2X + 100 = 3X - 200 \rightarrow 2X - 3X = -200 - 100 \rightarrow -X = -300 \rightarrow X = 300$$

$$2X + 100 = 2(300) + 100 = 700 \text{ یا } 3X - 200 = 3(300) - 200 = 700$$

نکته ۲۴- معادله غیر ممکن (ممتنع):

اگر پس از ساده کردن یک معادله به یک تساوی همیشه غلط برسیم، در اینصورت معادله جواب ندارد و می‌گوییم معادله غیر ممکن (ممتنع) است.

$$5X + 8 = 5X + 3$$

$$5X + 8 = 5X + 3 \rightarrow 5X = 3 - 8 \rightarrow 0 = -5$$

این معادله جواب ندارد و غیر ممکن است.

نکته ۲۵- معادله مبهم:

اگر پس از ساده کردن یک معادله به یک تساوی همیشه درست برسیم، در اینصورت جواب معادله به X وابسته نخواهد بود و معادله به ازای هر مقداری از X درست است؛ یعنی معادله بی‌شمار جواب دارد و می‌گوییم معادله مبهم است.

$$8X - 3X + 7 = 5X + 9 - 2$$

$$8X - 3X + 7 = 5X + 9 - 2 \rightarrow 8X - 3X - 5X = 9 - 2 - 7 \rightarrow 0 = 0$$

این معادله بی‌شمار جواب دارد و مبهم است.

نکته ۲۶- تساوی، قابل تبدیل شدن به معادله است.

$$6n + 7 = 37 \quad \text{و} \quad 4n = 12$$

نکته ۲۷- نامساوی‌ها، قابل تبدیل شدن به نامعادله هستند.

نکته ۲۸- مجموع محیط و مساحت یک مربع تنها از نظر عددی معنادار است، زیرا در کمیت متفاوت هستند. محیط، یک کمیت یک بعدی و مساحت، یک کمیت دو بعدی را نشان می دهد.

مثال: مجموع محیط و مساحت مستطیلی به طول X و عرض Y برابر است با:

حل مسئله - مساحت = XY

محیط = $2(X + Y) = 2X + 2Y \rightarrow$ محیط + مساحت = $XY + 2X + 2Y$



مای دررس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir