

زمان برگزاری: ۱۰۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: ریاضی دوازدهم تجربی

تاریخ آزمون:

۱- با فرض  $g(x) = \sqrt{x} + 1$  و  $fog(x) = x + 2\sqrt{x}$ ، ضابطه تابع  $f$  و مقدار  $f(4)$  را به دست آورید.

۲

۲- تابع  $f$  روی  $\mathbb{R}$  اکیداً صعودی است. دامنه تابع  $g$  را بیابید.

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{f(|x-1|) - f(|x|)}}$$

۱,۵

۳- با محدود کردن دامنه تابع  $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ، یک تابع یک به یک به دست آورده و دامنه و برد  $f$

۲

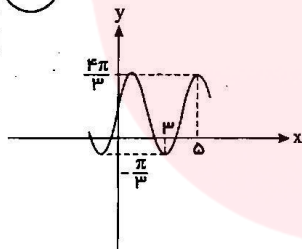
و وارون آن را بنویسید

۱,۵

۴- اگر  $\sin x + \cos x = \frac{4}{3}$  باشد حاصل  $\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}$  چقدر است؟

۱,۵

۵- نمودار تابع  $f(x) = a \sin bx + c$  به صورت زیر است، ضابطه تابع را بیابید.



۱,۵

۶- معادله مثلثاتی زیر را حل کرده و جواب‌های واقع در بازه  $[0, 2\pi]$  را بیابید.

$$\sin x + \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

۱,۵

۷- اگر باقی‌مانده  $f(x)$  بر  $x - 1$  برابر ۳ و باقی‌مانده  $f(x)$  بر  $x^2 - 4$  عبارت  $3x + 1$  باشد، باقی‌مانده

$f(x)$  بر  $x^2 - 3x + 2$  را بیابید.

۱,۵

۸- اگر  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+1}{x^2+mx+n} = -\infty$  آنگاه  $m$  و  $n$  را بیابید.

-۹

۱,۵

حاصل  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \left( \frac{x}{x-1} + \frac{-x+2}{x-4} \right)$  کدام است؟

۱۰- در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2}$  اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{2}$  باشد، آنگاه حد  $f(x)$  وقتی  $x \rightarrow -1$  کدام است؟

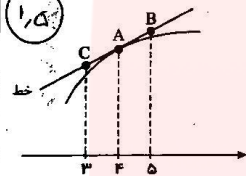
۱٫۵

۱

۱۱- حد تابع  $\frac{x^2 - [x^2]}{3x^2 + 2}$  وقتی  $x \rightarrow -\infty$  کدام است؟

۱۲- برای تابع  $f$  در شکل روبه‌رو داریم  $f'(4) = 1.5$  و  $f(4) = 24$  با توجه به شکل، مختصات نقاط  $A$ ،  $B$  و  $C$  را بیابید.

۱٫۵



۱٫۵

۱۳- با استفاده از تعریف، مشتق تابع  $f(x) = \sqrt{x-1}$  را در نقطه  $x = 9$  بیابید.

مای دررس  
گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

$g(x) = \sqrt{x} + 1$  و  $(f \circ g)(x) = x + 2\sqrt{x}$   $f(x) = ?$  و  $f(r) = ?$  (سؤال ۱)

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x} + 1) = x + 2\sqrt{x} = \sqrt{x}^2 + 2\sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)$

$\Rightarrow f(g(x)) = f(\sqrt{x} + 1) = \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1 + 1) \rightarrow \sqrt{x} + 1 = t$

$\sqrt{x} = t - 1$

$\Rightarrow f(t) = (t-1)(t+1) = t^2 - 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - 1$  و  $f(r) = r^2 - 1 = 10$

$g(x) = \frac{x}{\sqrt{f(|x-1|) - f(|x|)}} \rightarrow Dg = f(|x-1|) - f(|x|) > 0$  (سؤال ۲)

$\Rightarrow f(|x-1|) > f(|x|)$   $\xrightarrow{\text{فکر منطقی است}}$

$\Rightarrow |x-1| > |x|$

$\Rightarrow |x-1| > |x| \xrightarrow{\text{مربع کردن}} x^2 - 2x + 1 > x^2 \rightarrow x^2 - 2x + 1 > 0$

$\rightarrow \Delta = 9 - 4 = 5, x = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{2} \rightarrow x \in (-\infty, \frac{2-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{2+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$

$f(x) = x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2x + 1 + 1 - 1 = (x-1)^2 + 1$  (سؤال ۳)

پس:  $x \geq 1 \rightarrow y - 1 = (x-1)^2 \Rightarrow \pm \sqrt{y-1} = x-1 \Rightarrow x = \sqrt{y-1} + 1$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 1$   $R_f = [1, +\infty)$

$\sin x + \cos x = \frac{14}{9} \xrightarrow{\text{مربع کردن}} \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = \frac{196}{81}$  (سؤال ۴)

$\Rightarrow 1 + 2\sin x \cos x = \frac{196}{81} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{196}{81} - 1 = \frac{115}{81}$

$\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x} = k \xrightarrow{\text{مربع کردن}} \tan x + \cot x + 2\sqrt{\tan x \cot x} = k^2$

$\Rightarrow \frac{1}{\sin x} + 1 = k^2 \Rightarrow \frac{1}{\frac{115}{81}} + 1 = k^2 \Rightarrow k^2 = \frac{81}{115} + 1 \Rightarrow k = \frac{\sqrt{196}}{\sqrt{115}}$

$$f(x) = a \sin bx + c \quad \begin{cases} -|a| + c = -\frac{\pi}{\mu} \\ |a| + c = \frac{\pi}{\mu} \end{cases} \rightarrow |a| = \frac{\pi}{\mu} - \frac{\pi}{\mu} = \frac{0\pi}{\mu}$$

(d)  $\int \frac{1}{x} dx$

$$c = \pi \Rightarrow c = \frac{\pi}{\mu}$$

$$f(x) = \frac{-\pi}{\mu} \Rightarrow f(x) = \frac{d\pi}{\mu} \sin bx + \frac{\pi}{\mu} \Rightarrow -\frac{\pi}{\mu} = \frac{d\pi}{\mu} \sin^{\mu} b + \frac{\pi}{\mu}$$

$$-\frac{d\pi}{\mu} = \frac{d\pi}{\mu} \sin^{\mu} b \Rightarrow \sin^{\mu} b = -1 \Rightarrow \mu b = \frac{\pi}{\mu} \Rightarrow b = \frac{\pi}{\mu}$$

$$f(x) = \frac{d\pi}{\mu} \sin \frac{\pi}{\mu} bx + \frac{\pi}{\mu}$$

$$\sin x + \cos^{\mu} x = \frac{1}{\mu} \Rightarrow \sin x + 1 - \sin^{\mu} x = \frac{1}{\mu} \Rightarrow \sin^{\mu} x - \sin x - \frac{\mu-1}{\mu} = 0$$

(e)  $\int \frac{1}{x} dx$

$$\sin x = t, \quad t^{\mu} - t - \frac{\mu-1}{\mu} = 0 \rightarrow \Delta = (-1)^{\mu} - 4(1)(-\frac{\mu-1}{\mu}) = 1 + \mu - 1 = \mu$$

$$\Rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{\mu}}{\mu} \quad \begin{cases} t = \frac{1 + \sqrt{\mu}}{\mu} = \frac{\mu}{\mu} = 1 \\ t = \frac{1 - \sqrt{\mu}}{\mu} = -\frac{1}{\mu} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin x = -\frac{1}{\mu} \Rightarrow x = \mu k\pi - \frac{\pi}{\mu} \rightarrow x = \mu\pi - \frac{\pi}{\mu} = \frac{\mu\pi}{\mu}$$

(v)  $\int \frac{1}{x} dx$

$$f(x) = ax^{\mu} + bx + c \quad \begin{matrix} f(1) = \mu, f(2) = \nu \\ f(-1) = -\delta \end{matrix} \rightarrow f(x) = \frac{1}{\mu} x^{\mu} + \mu x - \frac{1}{\mu}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu} x^{\mu} + \mu x - \frac{1}{\mu} = (x^{\mu} - \mu x + 1) Q'(x) + ax + b$$

$$\rightarrow x=1 \Rightarrow \frac{1}{\mu} + \mu - \frac{1}{\mu} = a(1) + b \Rightarrow a + b = \mu$$

$$\rightarrow x=2 \Rightarrow \frac{1}{\mu} + \nu - \frac{1}{\mu} = \mu a + b \Rightarrow \mu a + b = \nu$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu a + b = \nu & \times 1 \\ a + b = \mu & \times (-\mu) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mu a + b = \nu \\ -\mu a - \mu b = -\mu^2 \end{cases} \oplus$$

$$-b = 1 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = \mu$$

$$\Rightarrow R(x) = \mu x - 1$$

سوال (1)

$$\lim_{x \rightarrow -r} \frac{x+1}{x^r + mx + n} = -\infty \Rightarrow \begin{cases} x = -r \rightarrow \text{ریشه مضاعف صورت} \\ g(x) = x^r + mx + n \rightarrow g(r) = 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r + r^m + n = 0 \rightarrow \boxed{r^m + n = -r} \\ m^r - rn = 0 \Rightarrow m^r = rn \rightarrow \boxed{n = \frac{m^r}{r}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow r^m + \frac{m^r}{r} = -r \xrightarrow{\times r} m^r + r^m = -r^2 \Rightarrow m^r + r^m + r^2 = 0$$

$$\Rightarrow (m+r)^r = 0 \Rightarrow m = -r, n = \frac{(-r)^r}{r} = \frac{r^r}{r} = r$$

سوال (9)

$$\lim_{x \rightarrow r^-} \frac{x}{x-1} + \frac{-x+r}{x-r} = \frac{r}{r-1} + \frac{-r+r}{r-r} = \frac{r}{r-1} - \frac{r}{0^-} = \frac{r}{r-1} + \infty = +\infty$$

سوال (10)

$$f(x) = \frac{ax + \sqrt{rx^r + d}}{rx+r} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{d}{r}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{rx^r + d}}{rx+r} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + r|x|}{rx+r} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a+r)x}{rx} = \frac{a+r}{r} = \frac{d}{r}$$

$$\Rightarrow a = r, f(x) = \frac{rx + \sqrt{rx^r + d}}{rx+r}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{rx + \sqrt{rx^r + d}}{rx+r} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{rx + \sqrt{rx^r + d}}{rx+r} \times \frac{rx - \sqrt{rx^r + d}}{rx - \sqrt{rx^r + d}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{rx^r - rx^r - d}{r(x+1)(rx - \sqrt{rx^r + d})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-d}{r(x+1)(rx - \sqrt{rx^r + d})}$$

$$= \frac{-d}{-1r} = \frac{d}{r}$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{n^{\mu} - [n^{\mu}]}{\mu n^{\mu} + \mu} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{n^{\mu}}{\mu n^{\mu} + \mu} - \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{[n^{\mu}]}{\mu n^{\mu} + \mu}$$

$$= \frac{1}{\mu} - \frac{0}{+\infty} = \frac{1}{\mu} - 0 = \frac{1}{\mu}$$

(11) سؤال

$$f'(x) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_B - \mu x}{\delta - x} = \frac{\mu}{\mu} \Rightarrow \frac{y_B - \mu x}{1} = \frac{\mu}{\mu} \Rightarrow y_B - \mu x = \mu$$

$$\Rightarrow y_B = \mu \Rightarrow y_B = \frac{\delta}{\mu} = \mu \delta \Rightarrow B \left| \begin{array}{l} \delta \\ \mu \delta, \delta \end{array} \right.$$

(12) سؤال

$$f'(x) = f'(x) = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{\mu}{\mu} \Rightarrow \frac{\mu x - y_C}{x - \mu} = \frac{\mu}{\mu} \Rightarrow \mu x - y_C = \mu$$

$$\Rightarrow y_C = \mu \delta \Rightarrow C \left| \begin{array}{l} \mu \\ \mu \delta \end{array} \right. \quad A \left| \begin{array}{l} \mu \\ \mu \delta \end{array} \right.$$

$$f(x) = \sqrt{x-1} \quad f'(9) = ? \quad f(9) = \sqrt{9-1} = \mu\sqrt{2} \quad (13) \text{ سؤال}$$

$$f'(9) = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{f(x) - f(9)}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x-1} - \mu\sqrt{2}}{x-9} = \frac{0}{0} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x-1} - \mu\sqrt{2}}{x-9} \times \frac{\sqrt{x+1} + \mu\sqrt{2}}{\sqrt{x+1} + \mu\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-1 - \mu^2}{(x-9)(\sqrt{x+1} + \mu\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x+1} + \mu\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{10} + \mu\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{10} + \mu\sqrt{2}}{\sqrt{10} + \mu\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10} + \mu\sqrt{2}}{\mu}$$