

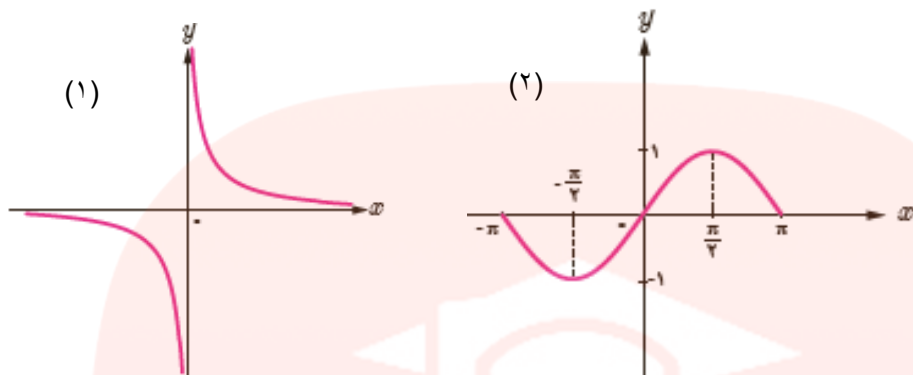
درس: ریاضی ۳	امتحان پایان نیم سال اول	راهنمای تصحیح امتحان هماهنگ
تعداد صفحه: ۳		درس ریاضی: ۳
تاریخ امتحان: ۱۰/۱۱		پایه: دوازدهم
مدت امتحان: ۱۱۰ دقیقه		رشته: تجربی
نمره:		ساعت: ۸

راهنمای تصحیح

بارم	شماره	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.
۱	۱	<p>الف) تابع $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x + 1$ یک چند جمله‌ای از درجه ۳ است.</p> <p>ب) تابع $y = x^3$ در دامنه‌اش نزولی است.</p> <p>ج) برد تابع $y = kf(x)$ با برد تابع $y = f(x)$ یکسان می‌باشد.</p> <p>د) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است.</p> <p>پاسخ:</p> <p>الف) درست ب: نادرست ج) نادرست د) درست هر مورد ۰/۲۵ صفحات: ۱، ۷، ۱۵ و ۴۱</p>
۱	۲	<p>در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب را انتخاب کنید.</p> <p>الف) نمودار تابع $g(x) = x^2$ در بازه $(0, 1)$، از نمودار تابع $f(x) = x^3$ قرار دارد. (پایین تر - بالاتر)</p> <p>ب) دامنه تابع $f(x) = x^3$ برابر است. $(0, +\infty)$، R</p> <p>ج) اگر $f = \{(5, 6), (6, 8)\}$ باشد، حاصل $f^{-1}(6)$ برابر است. $(8, 5)$</p> <p>د) باقی مانده تقسیم عبارت $6 - 5x + x^2 - 2x$ بر $x - 3$ برابر است. $(0, x - 3)$</p> <p>پاسخ:</p> <p>الف) بالاتر ب: R ج) ۵ د) ۰ هر مورد ۰/۲۵ صفحات: ۴، ۲۴ و ۵۰</p>

<p>۰/۵</p>	<p>به کمک نمودار تابع $f(x) = x^3$، ضابطه هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.</p> <p>الف) $f(x) = (x + 1)^3$ ب) $f(x) = -x^3$</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>(۱)</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>(۲)</p> </div> </div> <p style="text-align: right; color: red;">پاسخ:</p> <p>الف) (۱) ب) (۲) هر مورد ۰/۲۵ صفحه: ۵</p>	<p>۳</p>
<p>۱/۵</p>	<p>اگر تابع $f(x) = x - 2$ و $g(x) = x^2 - 1$ دامنه و ضابطه تابع $g \circ f$ را به دست آورید.</p> <p style="text-align: right; color: red;">پاسخ:</p> <p>دامنه: R ضابطه: $(x - 2)^2 - 1$ هر مورد ۰/۷۵ صفحه: ۱۴</p>	<p>۴</p>
<p>۱/۵</p>	<p>تابع $f(x) = x^2 - 2x + 2$ یک به یک نیست. با محدود کردن دامنه آن تابعی یک به یک بسازید و ضابطه وارون آن را به دست آورید.</p> <p style="text-align: right; color: red;">پاسخ:</p> <p>بازه $[1, +\infty)$، ضابطه وارون $k(x) = \sqrt{x - 1} + 1$ هر مورد ۰/۷۵ صفحه: ۲۷</p>	<p>۵</p>

هر کدام از تابع‌های زیر در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟



پاسخ:

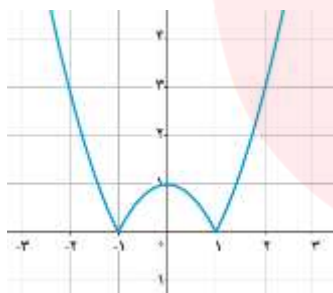
(۱): در فاصله‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ نزولی است. ۰/۵

(۲): در فاصله‌های $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ و $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ نزولی است و در فاصله $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ صعودی است ۰/۵ صفحه: ۸

نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را رسم کنید و بازه‌هایی که این تابع در آنها یک به یک و نزولی است را مشخص کنید.

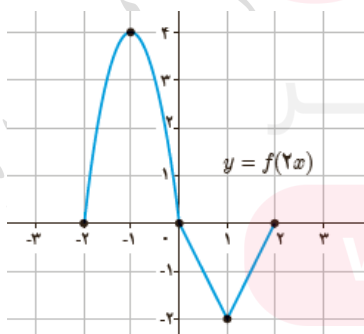
پاسخ:

رسم: ۰/۵، در بازه‌های $(-\infty, -1]$ و $[0, 1]$ نزولی و یک به یک است. ۰/۵ صفحه: ۱۷



نمودار تابع $f(x)$ با دامنه $[-4, 4]$ به صورت زیر داده شده است، با استفاده از آن نمودار تابع $y = f(2x)$ را رسم کنید.

پاسخ:



صفحه: ۲۰

رسم کامل: ۱/۵

دور تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x) = 3\sin(2x) - 2$ را مشخص کنید.

پاسخ:

$$T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\text{ماکزیمم: } \max = |3| - 2 = 1$$

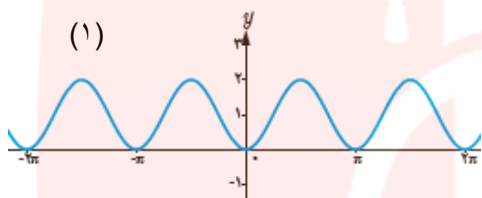
$$\text{مینیمم: } \max = -|3| - 2 = -5$$

صفحه: ۳۵

هر یک از توابع داده شده را به نمودارهای زیر نظیر کنید.

ب) $f(x) = 1 - \cos 2x$

الف) $f(x) = 2 - \cos \frac{1}{2}x$



پاسخ:

الف: (۲) ب: (۱) هر مورد ۰/۲۵ صفحه ۴۰

مقدار $\sin 15^\circ$ را بیابید.

پاسخ:

$$\cos 30^\circ = 1 - 2\sin^2 15^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2 15^\circ \Rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 15^\circ = \pm \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

صفحه ۴۳

معادله $2\sin^3 x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

پاسخ:

$$2\sin^3 x = \sqrt{2} \Rightarrow \sin^3 x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \\ 3x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

صفحه ۴۷

فرض کنید $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه ای حاده باشد، مقدار $\sin 2\alpha$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$\sin^2 \alpha \equiv 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 \equiv \frac{144}{169} \Rightarrow \sin \alpha \equiv \frac{12}{13}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \equiv 2 \times \frac{12}{13} \times \frac{5}{13} = \frac{120}{169}$$

صفحه ۴۸

حدود زیر را در صورت وجود حساب کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$ ج) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$ د) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{|3x + 1|}$

پاسخ:

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 1}} \equiv \frac{5(2)}{\sqrt{2^2 + 1}} \equiv \frac{10}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \equiv 2\sqrt{5}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} \equiv \frac{0}{0}$ مبهم

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} \equiv \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x(x + 3)} \equiv \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x - 3)}{x} \equiv \frac{(-3 - 3)}{-3} = 2$$

ج) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2} \equiv \frac{1 - \sqrt{1}}{2 - 2} \equiv \frac{0}{0}$ مبهم

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2} \equiv \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})}{(x^2 + x - 2)(x + \sqrt{x})} \equiv \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - x)}{(x + 2)(x - 1)(x + \sqrt{x})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)}{(x + 2)(x - 1)(x + \sqrt{x})} \equiv \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x + 2)(x + \sqrt{x})} \equiv \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1 + 2)(1 + \sqrt{1})} = \frac{1}{6}$$

د) مخرج در نزدیکی $-\frac{1}{3}$ با مقادیر مثبت به صفر میل می کند و حد صورت هم در $-\frac{1}{3}$ برابر ۱- است (۰/۵) بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{|3x + 1|} \equiv -\infty$$

www.my-dars.ir

صفحه ۵۳

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x^2}$

پاسخ:

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x^3 + 2}$

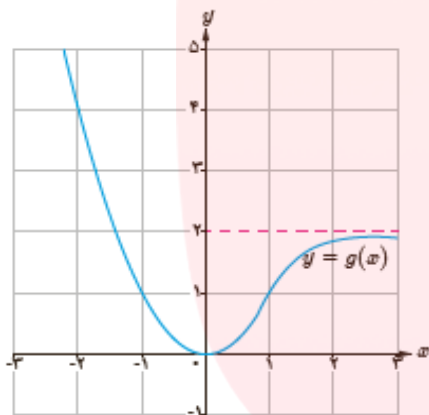
۱/۵

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x^2} = \frac{-2}{+\infty} = 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x^3 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2 + \frac{1}{x})}{x^3(1 + \frac{2}{x^3})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$

۱۵

با توجه به نمودار تابع $g(x)$ طرف دوم تساوی‌های داده شده زیر را بنویسید.



الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \dots$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots$

۰/۵

۱۶

پاسخ:

الف) $+\infty$ ۰/۲۵

ب) 2 ۰/۲۵

صفحه ۶۲

۲۰

در نهایت، نظر همکاران محترم صائب است.