فصل دوّم : احتمال

درس اوّل : مبانی احتمال

علم آمار و احتمال هر دو برای حل مسئله هایی به کار می روند که همراه با عدم اطمینان و ناآگاهی از شرایط آینده است.

مواقعی که جامعه نامعلوم بوده و امکان بررسی همهٔ اعضای جامعه نیست، با انجام نمونه گیری و جمع آوری داده های معلوم سعی داریم جامعه را بشناسیم، این کار در علم آمار صورت می گیرد.

* شناخت جامعه ی نامعلوم از روی نمونهٔ معلوم، کار علم آمار است *

اما وقتی جامعه معلوم است و هدف شناخت نمونه ی نامعلوم است، این کار در علم احتمال انجام می شود.

* شناخت نمونه ی نامعلوم از روی جامعه ی معلوم، کار علم احتمال است *

مثال: کدام یک از سؤال های زیر مربوط به علم آمار و کدام یک مربوط به علم احتمال است؟

الف) چند نفر از فوتبالیست های لیگ برتر در سال گذشته تحصیلات دانشگاهی داشته اند؟

علم آمار

ب) ۹۷٪ افراد جامعه ای باسوادند، اگر ۱۰ نفر از آنها را انتخاب کنیم، چقدر ممکن است یکی از آنها بی سواد باشد؟

علم احتمال

پ) چند نفر از دانش آموزان ایران عضو شبکه ی اجتماعی فضای مجازی هستند؟

علم آمار

ت) درآمد کارمندان شرکت نفت چقدر است؟

علم آمار

ث) می دانیم از بین ۱۰ لامپ یک جعبه ۶ تا از آنها سالم است. چند تا لامپ از جعبه برداریم، تا تقریباً مطمئن باشیم که حداقل یکی از لامپ ها سالم نیست؟ علم احتمال

فضای نمونه‌ای: در آزمایش تصادفی:

به مجموعه‌ی همه‌ی نتایج ممکن، در یک آزمایش تصادفی، فضای نمونه‌ای آن گفته و با S نمایش می‌دهیم.

برآمد: به هر عضو فضای نمونه‌ای یک برآمد گوییم.

به طور مثال در پرتاب یک تاس مجموعه‌ی $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ فضای نمونه‌ای بوده که تعداد اعضای آن $n(S)=۶$ است و هر یک از اعضای S یک برآمد است مثلاً ۴ یک برآمد از S است.

توجه: اگر آزمایش اصلی از دو آزمایش با فضاهای نمونه‌ای S_1 و S_2 تشکیل شده باشد، فضای نمونه‌ای مناسب $S_1\times S_2$ خواهد بود. (البته فرقی نمی‌کند $S_1\times S_2$ یا $S_2\times S_1$ را در نظر بگیریم).

به عنوان نمونه در پرتاب یک تاس و یک سکه داریم:

$$S_1=\{R,P\} \quad \text{و} \quad S_2=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

$$\Rightarrow S=S_1\times S_2=\{(R,۱),(R,۲),\dots,(R,۶),(P,۱),(P,۲),\dots,(P,۶)\}$$

پیشامد: به هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای، پیشامد گوییم.

توجه داشته باشیم که $\varnothing$ پیشامد غیرممکن و S پیشامد حتمی است.

سؤال: با چه شرطی می‌توان ادعا کرد، یک پیشامد رخ داده است؟

پاسخ: اگر با انجام آزمایش تصادفی، یکی از عضوهای پیشامد، اتفاق بیفتد، گوییم پیشامد رخ داده است.

به طوری مثال اگر در پرتاب یک تاس $A=\{۱,۳,۶\}$ پیشامد مورد نظر باشد و نتیجه‌ی پرتاب تاس عدد ۳ باشد، گوییم A رخ داده است. به عبارت دیگر

اگر $B \subseteq A$ و با انجام آزمایش B رخ بدهد، حتماً A هم رخ داده است.

مثال: اگر a برآمدی از یک فضای نمونه‌ای ۵ عضوی باشد، با رخ دادن a، چند پیشامد از این فضای نمونه‌ای رخ داده است؟

با رخ دادن a، همهٔ پیشامدهایی که a عضوی از آنهاست رخ داده است. یعنی تمام زیرمجموعه‌های S که شامل a هستند. تعداد آنها برابر است با:

حالات $$\underset{a}{\boxed{۱}}\underbrace{\boxed{۲}\boxed{۲}\boxed{۲}\boxed{۲}}_{\text{۴ عضو دیگر}} \xrightarrow{\times} ۲^۴ = ۱۶$$

مثال: از میان ۴ معلم، ۵ کارگر، ۲ کارمند، یک گروه ۳ نفره انتخاب کرده‌ایم. مطلوبست تعداد اعضای:

الف) فضای نمونه $n(S) = \binom{۱۱}{۳} = ۱۶۵$

ب) پیشامد A این که هر ۳ نفر انتخاب شده دارای یک شغل باشند.

با توجه به اینکه تعداد کارمندان کمتر از ۳ است، بنابراین هر سه نفر معلم یا هر سه نفر کارگر خواهند بود. در نتیجه:

$$n(A) = \binom{۴}{۳} \overset{\text{یا}}{+} \binom{۵}{۳} = ۴ + ۱۰ = ۱۴$$

پ) پیشامد B این که هیچ یک از افراد انتخاب شده همکار نباشند.

یعنی از هر شغل یکی انتخاب می‌شود:

$$n(B) = \binom{۴}{۱} \overset{\text{و}}{\times} \binom{۵}{۱} \overset{\text{و}}{\times} \binom{۲}{۱} = ۴ \times ۵ \times ۲ = ۴۰$$

ت) پیشامد C این که حداقل یکی از افراد انتخاب شده کارمند باشد.

یعنی ۱ کارمند و ۲ نفر دیگر از بقیه یا این که ۲ کارمند و ۱ نفر دیگر از بقیه باشند:

$$n(C) = \binom{۲}{۱} \times \binom{۹}{۲} + \binom{۲}{۲} \times \binom{۹}{۱} = ۲ \times ۳۶ + ۱ \times ۹ = ۸۱$$

مثال: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، هر یک از پیشامدهای زیر را توضیح دهید:

الف) $A \cap B$ ← این پیشامد وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ بدهند.

ب) $A \cup B$ ← این پیشامد زمانی رخ می‌دهد که دست کم یکی از دو پیشامد رخ دهد.

پ) $A - B$ ← این پیشامد وقتی رخ می‌دهد که A رخ دهد ولی B رخ ندهد که همان $A \cap B'$ است.

ت) A' ← این پیشامد وقتی رخ می‌دهد که A رخ ندهد.

ث) $(A-B) \cup (B-A)$ ← این پیشامد وقتی رخ می‌دهد که فقط یکی از دو پیشامد رخ دهد. یعنی A و B با هم رخ ندهند.

پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار گوییم هرگاه $A \cap B = \varnothing$ باشد.

در حالت کلی‌تر، چند پیشامد را ناسازگار گوییم هرگاه دو به دو هیچ اشتراکی نداشته باشند.

مثال: یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم.
پیشامد A آن است که سکه رو و تاس عدد فرد باشد.
پیشامد B آن است که تاس عدد اول را نمایش دهد.
آیا A و B ناسازگارند؟ چرا؟

$A = \{(R,۱),(R,۳),(R,۵)\}$

$B = \{(R,۲),(R,۳),(R,۵),(P,۲),(P,۳),(P,۵)\}$

$\Rightarrow A \cap B = \{(R,۳),(R,۵)\} \Rightarrow A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow$ A و B سازگارند

تمرین: اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار باشند، آیا همواره دو پیشامد A' و B' سازگارند؟
خیر - اگر $B = A'$ باشد آنگاه:
$B' \cap A' = A \cap A' = \varnothing \longrightarrow$ ناسازگارند

تمرین: یک راننده تاکسی با حداکثر ۴ مسافر در یک خط رفت و برگشت کار می‌کند. فضای نمونه‌ای پدیدهٔ تعداد مسافران در مسیر رفت و برگشت چند عضو دارد هرگاه بدانیم حداقل در یک مسیر خالی حرکت نمی‌کند؟

فضای نمونه‌ای تعداد مسافران موجود در تاکسی در مسیر رفت و برگشت به صورت $S_1 = S_2 = \{۰,۱,۲,۳,۴\}$ و فضای نمونه‌ای کل $S = S_1 \times S_2$ است که ۲۵ عضو دارد.

حال با توجه به این که طبق فرض سؤال، حداقل در یک مسیر خالی حرکت نمی‌کند، پس حالت (۰,۰) قابل قبول نیست، در نتیجه فضای نمونه‌ای ۲۴ عضو دارد.

تمرین: یک تاس را پرتاب می‌کنیم. هر عددی که ظاهر شود به همان تعداد سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟

برای هر عدد تاس، تعداد حالات پرتاب سکه را طبق جدول زیر می‌نویسیم:

عدد تاس	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تعداد پرتاب سکه	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تعداد حالات سکه	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6

$$\Longrightarrow n(S) = 2^1 + 2^2 + \dots + 2^6 = 126$$

تمرین: در پرتاب دو تاس متمایز اگر A پیشامد مجموع شماره‌ها برابر چهار باشد، چند پیشامد دوعضوی ناسازگار با A داریم؟

$A = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$ و می‌دانیم فضای نمونه‌ای دارای ۳۶ عضو است. اعضای A را از S خارج نموده و تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی از آن ۳۳ عضو باقیمانده را حساب می‌کنیم:

$$\binom{33}{2} = \frac{33 \times 32}{2} = 528$$

اصول احتمال :

احتمال پیشامد A را با $P(A)$ نمایش می دهیم که همواره $0 \leq P(A) \leq 1$ است.

اصول احتمال عبارتند از :

① $P(S)=1$

② اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، آنگاه $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

مثال : در مجتمع آموزشی صالحین آبادان ۴۳٪ دانش آموزان گروه خونی A، ۲۶٪ نوع B، ۱۷٪ نوع AB و بقیه از نوع O هستند.

اگر دانش آموزی را به تصادف انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد گروه خونی آن از نوع A یا B باشد؟

گروه خونی افراد پیشامدهای ناسازگارند، بنابراین :

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)=0/43+0/26=0/69$$

قضیه های احتمال :

① $P(A')=1-P(A)$

اثبات : میدانیم دو پیشامد A و A' ناسازگارند و اجتماع آنها برابر S است. بنابراین طبق اصل ① و اصل ② می توان نوشت :

$$P(S)=P(A \cup A') \Rightarrow 1=P(A)+P(A') \Rightarrow P(A')=1-P(A)$$

مثال : اگر امروز احتمال بارش باران دو برابر نباریدن آن باشد، چقدر احتمال دارد امروز باران نبارد؟

پیشامد بارش باران را A فرض می کنیم بنابراین : $P(A)=2P(A')$

$$\xrightarrow{P(A')=1-P(A)} P(A')=1-2P(A') \Rightarrow 3P(A')=1 \Rightarrow P(A')=\frac{1}{3}$$

② $P(\emptyset)=0$

اثبات : با توجه به اینکه $\emptyset$ متمم S است، طبق قضیه ① می نویسیم :

$$P(\emptyset)=1-P(S)=1-1=0$$

③ اگر A ، B و C پیشامدها دوبه دو ناسازگار باشند، آنگاه :

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

* این قانون قابل تعمیم برای هر تعداد پیشامد است *

اثبات : A ، B و C دوبه دو ناسازگارند پس بدیهی است که A و $B\cup C$ نیز دو پیشامد ناسازگارند ولذا طبق اصل ② می‌توان نوشت :

$$P(A\cup B\cup C)=P(A\cup(B\cup C))\overset{\text{اصل ②}}{=\!=}P(A)+P(B\cup C)\overset{\text{اصل ②}}{=\!=}P(A)+P(B)+P(C)$$

مثال : در پرتاب دو تاس متمایز، سه پیشامد به شرح زیر تعریف می‌کنیم :

A : مجموع اعداد رو شده برابر ۵ باشد

B : یکی از اعداد رو شده ۵ باشد

C : یکی از اعداد رو شده دو برابر دیگری باشد

احتمال اینکه حداقل یکی از سه پیشامد فوق رخ دهد چقدر است ؟

ابتدا پیشامدها را با نوشتن اعضا مشخص می‌کنیم :

$$A=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱)\}\longrightarrow n(A)=۴\xrightarrow{n(S)=۳۶}P(A)=\frac{۴}{۳۶}$$

$$B=\{(۱,۵),(۲,۵),(۳,۵),(۴,۵),(۶,۵),(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴),(۵,۶)\}$$

$$\longrightarrow n(B)=۱۰\Longrightarrow P(B)=\frac{۱۰}{۳۶}$$

$$C=\{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۴),(۴,۲),(۳,۶),(۶,۳)\}\longrightarrow n(C)=۶\Longrightarrow P(C)=\frac{۶}{۳۶}$$

واضح است که پیشامدهای A و B و C دوبه دو ناسازگارند پس :

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{۴}{۳۶}+\frac{۱۰}{۳۶}+\frac{۶}{۳۶}=\frac{۲۰}{۳۶}=\frac{۵}{۹}$$

④ برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

اثبات: واضح است که پیشامدهای $A-B$ و $A\cap B$ ناسازگارند و $(A-B)\cup(A\cap B)=A$.

لذا بنا به اصل ② داریم:

$$P(A)=P\big((A-B)\cup(A\cap B)\big)=P(A-B)+P(A\cap B)$$

$$\Longrightarrow P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

مثال: احتمال اینکه زهرا در آزمون رانندگی قبول شود ۸۰٪ و احتمال اینکه او به همراه خواهرش در این آزمون قبول شود ۴۵٪ است. احتمال این که فقط زهرا قبول شود و خواهرش قبول نشود چقدر است؟

پیشامد قبولی زهرا را A و خواهرش را B می‌نامیم. بنابراین:

$P(A\ \text{فقط})=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=$ ۰/۸۰ − ۰/۴۵ = ۰/۳۵

مثال: اگر $P(A\cap B')=\frac{1}{2}$ و $P(A')=\frac{1}{3}$، مقدار $P(B-A')$ را بیابید.

$$P(A\cap B')=P(A-B)\longrightarrow P(A-B)=\frac{1}{2}$$

$$P(A')=\frac{1}{3}\longrightarrow P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{2}{3}-P(A-B')\Rightarrow P(A-B')=\frac{1}{6}$$

⑤ برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

اثبات: می‌دانیم $A\cup B=B\cup(A-B)$، همچنین دو پیشامد B و $A-B$ ناسازگارند.

درنتیجه بنا به اصل ② احتمال داریم:

$$P(A\cup B)=P(B)+P(A-B)$$

از طرفی طبق قضیه ④، $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$ بوده و در نتیجه:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

مثال: با فرض $P(A)=۰٫۴$ و $P(A'\cup B')=۰٫۷$ مقدار $P(A'\cup B)$ را بدست آورید.

طبق قانون قضیه متمم و قانون دمورگان داریم:

$$P(A'\cup B') = ۱ - P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow ۰٫۷ = ۱ - P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B) = ۰٫۳$$

$$P(A'\cup B) = P(A') + P(B) - P(A'\cap B)$$

$$= (۱ - ۰٫۴) + P(B) - P(B-A)$$

$$= ۰٫۶ + P(B) - (P(B) - \underbrace{P(A\cap B)}_{۰٫۳}) = ۰٫۹$$

مثال: ثابت کنید:

الف) $P(A\cap B) \geq P(A) + P(B) - ۱$

می‌دانیم: $P(A\cup B) \leq ۱ \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A\cap B) \leq ۱$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) - ۱ \leq P(A\cap B)$$

ب) $P(A'\cup B') = ۱ - P(A) - P(B) + P(A\cup B)$

راست $= ۱ - \cancel{P(A)} - \cancel{P(B)} + \cancel{P(A)} + \cancel{P(B)} - P(A\cap B)$

$$= ۱ - P(A\cap B) = P((A\cap B)') = P(A'\cup B')$$

پ) $P(A'\cup B) - P(A\cap B) = ۱ - P(A)$

چپ $= P(A') + P(B) - \underbrace{P(B\cap A')}_{P(B-A) = P(B) - P(B\cap A)} - P(A\cap B)$

$$= ۱ - P(A) + P(B) - P(B) + P(A\cap B) - P(A\cap B)$$

$$= ۱ - P(A)$$

نکته: می خواهیم از بین اعداد ۱، ۲، ۳، ...، n تعداد اعدادی را تعیین کنیم که بر k بخش پذیرند. برای این منظور عدد n را بر k تقسیم می کنیم، خارج قسمت این تقسیم همان تعداد مضارب k است.

مثال: از بین اعداد ۱، ۲، ۳، ...، ۷۰ چه تعداد از آنها بر ۳ بخش پذیرند؟ (یعنی مضرب ۳ هستند؟)

$$\begin{array}{r|l} ۷۰ & ۳ \\ \cline{2-2} \underline{۶۹} & \boxed{۲۳} \\ ۱ & \end{array} \longrightarrow$$ ۲۳ تا از آنها بر ۳ بخش پذیرند

مثال: عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می کنیم. احتمال های زیر را محاسبه کنید:

الف) عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشد.

$S = \{۱, ۲, ۳, ..., ۱۰۰\} \longrightarrow n(S) = ۱۰۰$

پیشامد اینکه عدد بر ۲ بخش پذیر باشه $= A \Rightarrow n(A) = ۵۰ \Rightarrow P(A) = \frac{۵۰}{۱۰۰}$

پیشامد اینکه عدد بر ۳ بخش پذیر باشه $= B \Rightarrow n(B) = ۳۳ \Rightarrow P(B) = \frac{۳۳}{۱۰۰}$

پیشامد اینکه عدد بر ۲ و ۳ یعنی ۶ بخش پذیر باشه $= A \cap B \Rightarrow n(A \cap B) = ۱۶ \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{۱۶}{۱۰۰}$

$$\Longrightarrow P(A \cup B) = \frac{۵۰}{۱۰۰} + \frac{۳۳}{۱۰۰} - \frac{۱۶}{۱۰۰} = \frac{۷۲}{۱۰۰}$$

ب) عدد انتخابی بر ۲ بخش پذیر باشه، ولی بر ۳ بخش پذیر نباشه

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{۵۰}{۱۰۰} - \frac{۱۶}{۱۰۰} = \frac{۳۴}{۱۰۰}$$

پ) عدد انتخابی نه بر ۲ بخش پذیر باشه و نه بر ۳.

$$P(A' \cap B') = ۱ - P((A' \cap B')') = ۱ - P(A \cup B) \overset{\text{طبق الف}}{=\!=} ۱ - \frac{۷۲}{۱۰۰} = \frac{۲۸}{۱۰۰}$$

تمرین ۱) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند بطوری که $B \subseteq A$ ، ثابت کنید:

الف) $P(A-B) = P(A) - P(B)$

طبق قضیه ④ داریم: $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$

از طرفی بنا به $B \subseteq A$ ، داریم: $A \cap B = B$

بنابراین: $P(A-B) = P(A) - P(B)$

ب) $P(B) \leqslant P(A)$

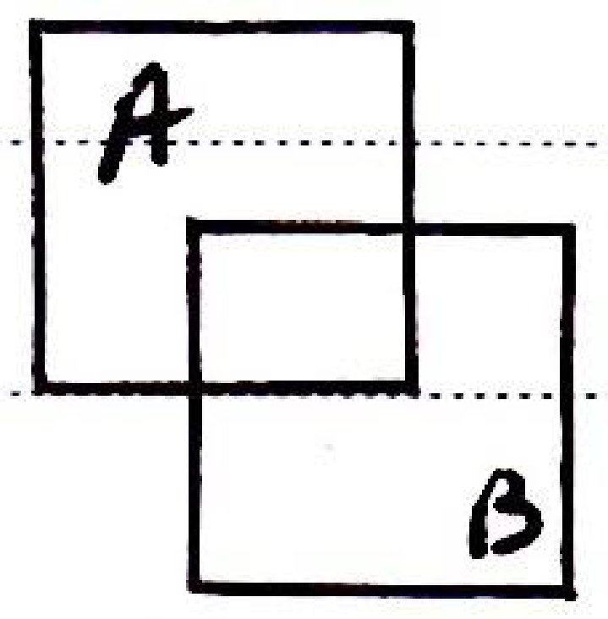
میدانیم: $P(A-B) \geqslant 0 \xrightarrow{\text{الف}} P(A) - P(B) \geqslant 0 \longrightarrow P(A) \geqslant P(B)$

تمرین (۲) برای دو پیشامد دلخواه A و B از فضای نمونه‌ای S نشان دهید

$P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - ۲P(A \cap B)$

$P(A \Delta B) = P\big((A-B) \cup (B-A)\big) \xrightarrow{\text{ناسازگارند } B-A \text{ و } A-B} P(A-B) + P(B-A)$

$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - ۲P(A \cap B)$



تمرین (۳) شخصی به سمت یک تخته هدف مطابق شکل روبرو شلیک می‌کند، احتمال زدن ناحیه‌ی A ، ۰/۶ و زدن ناحیه‌ی B ، ۰/۷ و زدن ناحیه‌ی مشترک برابر ۰/۵ است. مطلوبست احتمال آنکه:

الف) حداکثر یکی از دو ناحیه را بزنند.

ب) نه A را بزنند و نه B را بزنند.

$P(A) = ۰/۶$ و $P(B) = ۰/۷$ و $P(A \cap B) = ۰/۵$

الف) $P(A-B) + P(B-A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$

$= ۰/۶ - ۰/۵ + ۰/۷ - ۰/۵ = ۰/۳$

ب) $P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

$= 1 - ۰/۶ - ۰/۷ + ۰/۵ = ۰/۲$

تمرین (۴) احتمال آن که شخصی ناراحتی کلیه داشته باشد ۰٫۲۳ ، ناراحتی قلبی داشته باشد ۰٫۲ و دست کم یکی از دو نوع بیماری را داشته باشد ۰٫۳۸ است. مطلوبست احتمال آنکه:

الف) هر دو نوع بیماری را داشته باشد.

برای سهولت در محاسبه، پیشامد ناراحتی کلیه را با k و ناراحتی قلبی را با g نمایش می‌دهیم:

$P(k)=۰٫۲۳$ و $P(g)=۰٫۲$ و $P(k\cup g)=۰٫۳۸$

$$\xrightarrow{P(k\cup g)=P(k)+P(g)-P(k\cap g)} ۰٫۳۸=۰٫۲۳+۰٫۲-P(k\cap g) \Rightarrow P(k\cap g)=۰٫۰۵$$

ب) فقط ناراحتی قلبی داشته باشد.

$$P(g-k)=P(g)-P(g\cap k)=۰٫۲-۰٫۰۵=۰٫۱۵$$

پ) هیچ کدام از بیماری‌ها را نداشته باشد.

$$P(g'\cap k')=1-P(g\cup k)=1-۰٫۳۸=۰٫۶۲$$

تمرین (۵) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که $P(A)=۰٫۶$ ، $P(B)=۰٫۷$ و $P(A\cap B')=۰٫۲$ باشد، مطلوبست $P(A'\cap B)$.

$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

$$\Longrightarrow ۰٫۲=۰٫۶-P(A\cap B) \Longrightarrow P(A\cap B)=۰٫۴$$

$$P(A'\cap B)=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=۰٫۷-۰٫۴=۰٫۳$$

تمرین (۶) درصورتی $P(A\cup B)=۲P(A\cap B)$ ، حاصل $\frac{P(A\cup B)+P(A\cap B)}{P(A)-P(A\cap B')}$ را بیابید.

$$\text{کسر}=\frac{۲P(A\cap B)+P(A\cap B)}{P(A)-\underbrace{P(A-B)}_{P(A)-P(A\cap B)}}=\frac{۳P(A\cap B)}{P(A)-P(A)+P(A\cap B)}=۳$$

تمرین (۷) اگر A ، B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، ثابت کنید:

الف) $P(A\cap B\cap C) \leqslant P(A)+P(B)+P(C)$

می‌دانیم: $A\cap B\cap C \subseteq A \Rightarrow P(A\cap B\cap C) \leqslant P(A)$

از طرفی بدیهی است که $P(A) \leqslant P(A)+P(B)+P(C)$

در نتیجه: $P(A\cap B\cap C) \leqslant P(A)+P(B)+P(C)$

ب) $P(A\cup B\cup C) \leqslant P(A)+P(B)+P(C)$

می‌دانیم: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

$$\xrightarrow{P(A\cap B)\geqslant 0} P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant 0$$

$$\Rightarrow P(A)+P(B)\geqslant P(A\cup B)$$

بنابراین:

$$P(A\cup B\cup C)=P((A\cup B)\cup C) \leqslant P(A\cup B)+P(C) \leqslant P(A)+P(B)+P(C)$$

تمرین (۸) اگر برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S داشته باشیم $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ ثابت کنید $P(A\cap B')=P(A)\times P(B')$.

$$\begin{aligned} P(A\cap B') &= P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\\ &= P(A)-P(A)\times P(B)\\ &= P(A)\left(1-P(B)\right)\\ &= P(A)\times P(B') \end{aligned}$$

تمرین (۹) با فرض $P(A)+P(B)+P(C)=\frac{۹}{۴}$ نشان دهید:

$$P(A\cap B)+P(B\cap C)+P(C\cap A)\geqslant\frac{۳}{۲}$$

می دانیم: $P(A\cup B)\leqslant ۱ \Rightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)\leqslant ۱$

$\Rightarrow P(A\cap B)\geqslant P(A)+P(B)-۱$

$P(B\cap C)\geqslant P(B)+P(C)-۱$ به همین ترتیب

$P(C\cap A)\geqslant P(C)+P(A)-۱$

$\oplus$

$$P(A\cap B)+P(B\cap C)+P(C\cap A)\geqslant ۲(\underbrace{P(A)+P(B)+P(C)}_{۹/۴})-۳$$

$$\Longrightarrow P(A\cap B)+P(B\cap C)+P(C\cap A)\geqslant\frac{۳}{۲}$$

تمرین (۱۰) اگر $P(A)=۰/۳$ و $P(B)=۰/۶$ و $P(A\cup B)=۰/۷$ مطلوبست $P(A\Delta B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow ۰/۷=۰/۳+۰/۶-P(A\cap B)$

$\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۲$

$P(A\Delta B)=P(A-B)+P(B-A)$

$=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$

$=۰/۳-۰/۲+۰/۶-۰/۲=۰/۵$