فصل اول: آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

تعریف گزاره: به هر جمله‌ی خبری که بتوانیم (در حال حاضر یا در آینده) دقیقاً یکی از دو ارزش درست یا نادرست را به آن نسبت دهیم، یک گزاره گفته می‌شود.

مثال: هر یک از جملات زیر یک گزاره هستند.

الف) عدد ۷ فرد است.

ب) سعدی یک ریاضیدان است.

ج) شیراز پایتخت ایران است.

د) $4+7=11$

ه) حاصل 3×5 برابر ۱۶ است.

ت) پروین اعتصامی یک شاعر است.

نکته: جمله‌های غیرخبری گزاره نیستند.

مثال: جملات زیر به دلیل غیر خبری بودن، گزاره نیستند.

الف) چه هوای خوبی.

ب) شما چند سال دارید؟

ج) به سمت من بیا

نکته مهم: با توجه به تعریف گزاره، جمله‌های خبری که نتوانیم ارزش آنها (درست یا نادرست) مشخص کنیم، گزاره نیستند

مثال: جملات زیر گزاره نیستند

الف) ریاضی از عربی آسان‌تر است.

ب) رنگ قرمز زیباتر از سبز است.

مثال: دو گزاره‌ی درست و دو گزاره‌ی نادرست بیان کنید.

گزاره‌های درست:
- عدد ۴ زوج است.
- $\sqrt{2}$ گنگ است.

گزاره‌های نادرست:
- تمام اعداد اول فرد هستند
- $8-2\times3=18$

مثال: دو جمله بنویسید که گزاره نباشد.

الف) پائیز از زمستان زیباتر است.

ب) شما به چه ورزشی علاقه دارید.

نکته: در منطق ریاضی، هر گزاره را با یکی از حروف انگلیسی مانند p یا q یا r یا ... نمایش می دهیم

در جدول زیر وضعیت ارزشی یک، دو و سه گزاره مشخص شده اند.

p
د
ن

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	ن
د	ن	د
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

نکته مهم: اگر p یک گزاره باشد، نقیض آن را با $\sim p$ نمایش می دهیم و آن را به صورت «نقیض p» می خوانیم.

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

نکته: از آنجا که هر گزاره یک جمله ی خبری است (و حتماً دارای فعل است)
برای بیان نقیض یک گزاره فقط کافی است که فعل جمله را نفی کنیم
در این صورت اگر ارزش گزاره ی p درست باشد، ارزش گزاره ی $\sim p$ نادرست است
و اگر ارزش گزاره ی p نادرست باشد، ارزش گزاره ی $\sim p$ درست خواهد بود.

مثال: نقیض گزاره های زیر را بنویسید.

الف) $\sqrt{3}$ عددی گنگ است.

ب) تساوی $8-3=5$ برقرار است.

ج) ۲ عددی اول است.

د) عدد صفر زوج است

هـ) تهران پایتخت ایران نیست.

مثال: آیا نقیض عبارت «x مثبت است» را می توانیم به صورت «x منفی است» بنویسیم؟ چرا؟

جواب: خیر

زیرا نقیض «x مثبت است» به صورت «x مثبت نیست» می باشد به این معنی که مقدار x یا منفی است یا صفر است.

ترکیب گزاره ها

الف) ترکیب عطفی دوگزاره: اگر بخواهیم دوگزاره مانند p و q را با لفظ « و » باهم ترکیب کنیم از نماد « $\wedge$ » بین دوگزاره استفاده می کنیم و آن را به صورت « $p \wedge q$ » می نویسیم و به صورت « p و q » می خوانیم.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

جدول شماره (۱)

نکته ی مهم: ترکیب عطفی دوگزاره فقط هنگامی درست است که هر دوگزاره ارزش درست داشته باشند، و اگر حداقل یکی از دوگزاره نادرست باشد، ارزش گزاری « $p \wedge q$ » نادرست خواهد بود.

مثال: ارزش گزاره ی زیر را معلوم کنید.

« عدد ۲ فرد است و پنج فرد است »

دقت شود که حرف « و » ترکیب عطفی است

جواب: فرض می کنیم که
p به معنی: عدد ۲ فرد است
q به معنی: پنج فرد است

در این صورت چون ارزش گزاری p نادرست و ارزش گزاره ی q درست است پس با توجه به ردیف سوم جدول بالا ارزش گزاری « $p \wedge q$ » نادرست می باشد.

ب) ترکیب فصلی دوگزاره: اگر بخواهیم دوگزاره مانند p و q را با لفظ « یا » باهم ترکیب کنیم از نماد « $\vee$ » بین دوگزاره استفاده می کنیم و آن را به صورت « $p \vee q$ » می نویسیم و به صورت « p یا q » می خوانیم.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

جدول شماره (۲)

نکته ی مهم: ترکیب فصلی دوگزاره فقط هنگامی نادرست است که ارزش هر دوگزاره نادرست باشند، و اگر حداقل یکی از دوگزاره درست باشد، ارزش گزاری « $p \vee q$ » درست خواهد بود.

مثال: ارزش گزاری زیر را معلوم کنید

« عدد ۲ زوج است یا $\sqrt{3}$ گویا است »

دقت شود که حرف « یا » ترکیب فصلی است.

جواب: ارزش گزاری اولی درست و ارزش دومی نادرست است پس ارزش گزاره درست می باشد.

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه : ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

مثال: ارزش گزاره‌های زیر را معلوم کنید

الف) پنج عددی فرد و ۴ عددی اول است.

ب) عدد $\sqrt{2}$ گنگ یا ۷ عددی زوج است.

ج) $8=\sqrt{16}$ و صفر عددی اول است.

د) $\sqrt{9}$ گنگ است یا $\sqrt{10}$ گویا است

ج) ترکیب شرطی دو گزاره: اگر بخواهیم از گزاره‌ی p گزاره‌ی q را نتیجه بگیریم از نماد « $\Rightarrow$ » استفاده می‌کنیم و آن را به صورت « $p \Rightarrow q$ » می‌نویسیم و به صورت « اگر p آنگاه q » یا به صورت « p نتیجه می‌دهد q را » می‌خوانیم

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

جدول شماره‌ی (۳)

نکته: در گزاره‌ی شرطی « $p \Rightarrow q$ » p را مقدم و q را تالی می‌نامیم

نکته‌ی مهم: گزاره‌ی شرطی « $p \Rightarrow q$ » فقط زمانی دارای ارزش نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد (یعنی از یک گزاره‌ی درست نتیجه‌ی نادرست حاصل شود)

مثال: ارزش گزاره‌ی شرطی زیر را مشخص کنید.

« اگر عدد ۷ زوج است آنگاه ۲ عددی اول است »

$\underbrace{\text{عدد ۷ زوج است}}^{p} \Longrightarrow \underbrace{\text{۲ عددی اول است}}^{q}$

گزاره‌ی نادرست — گزاره‌ی درست

پس با توجه به ردیف سوم جدول بالا ارزش این گزاره درست می‌باشد.

مثال: ارزش گزاره‌ی شرطی زیر را مشخص کنید.

« اگر $\sqrt{2}$ گنگ است آنگاه $3^2=6$ »

$\underbrace{\sqrt{2}\ \text{گنگ است}}^{p} \Longrightarrow \underbrace{3^2=6}^{q}$

گزاره‌ی درست — گزاره‌ی نادرست

پس با توجه به ردیف دوم جدول بالا ارزش این گزاره نادرست می‌باشد

مثال: ارزش گزاره‌ی زیر را مشخص کنید.

« اگر تهران پایتخت ایران است پس ۳ عددی اول است »

نکته ی مهم: با توجه به دو ردیف آخر جدول شماره ی ۳ در گزاره ی شرطی $p \Rightarrow q$ اگر ارزش گزاره p نادرست باشد، درستی یا نادرستی گزاره ی q تأثیری در ارزش گزاره ی $p \Rightarrow q$ ندارد و همواره ارزش $p \Rightarrow q$ درست خواهد بود. و در این حالت می گوئیم:

گزاره ی شرطی $p \Rightarrow q$ به انتفای مقدم دارای ارزش درست است.

مثال: گزاره های زیر را در نظر بگیرید.

«اگر ۳=۲ باشد آنگاه ۷ فرد است.»

$$\overbrace{2=3}^{p} \Longrightarrow \overbrace{\text{۷ فرد است}}^{q}$$

نادرست   نادرست

ارزش گزاره به انتفای مقدم درست است.

مثال: گزاره ی زیر را در نظر بگیرید.

«اگر $3^2=2^3$ باشد، آنگاه $\sqrt{2}$ گنگ است.»

$$\overbrace{2^3=3^2}^{p} \Longrightarrow \overbrace{\sqrt{2}\ \text{گنگ است}}^{q}$$

نادرست   درست

ارزش گزاره به انتفای مقدم درست است.

سؤال امتحانی: اگر p گزاره ای درست و q گزاره ای نادرست و r گزاره ای دلخواه باشد، ارزش گزاره های مرکب زیر را مشخص کنید.

$(p \Rightarrow q) \wedge r$

p	q	$p \Rightarrow q$	r	$(p \Rightarrow q) \wedge r$
د	ن	ن	د	ن
د	ن	ن	ن	ن

$(p \wedge q) \Rightarrow r$

p	q	$p \wedge q$	r	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	ن	د

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

p	q	$p \Rightarrow q$	r	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	ن	د

ارزش گزاره درست می باشد و به ارزش r بستگی ندارد.

$(q \Rightarrow p) \wedge r$

q	p	$q \Rightarrow p$	r	$(q \Rightarrow p) \wedge r$
ن	د	د	د	د
ن	د	د	ن	ن

بنابراین ارزش گزاره به r بستگی دارد.

سؤال مهم: اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌ی مقابل را مشخص کنید.

$(p \wedge q) \Rightarrow r$

د) ترکیب دوشرطی: اگر بخواهیم از گزاره‌ی p گزاره‌ی q را نتیجه بگیریم و از گزاره‌ی q گزاره‌ی p را نتیجه بگیریم، از نماد « $\Leftrightarrow$ » استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم « $p \Leftrightarrow q$ » و آن را به صورت « p اگر و تنها اگر q » می‌خوانیم.

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow q$$

علامت هم‌ارز بودن یا معادل بودن

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

نکته‌ی مهم: با توجه به جدول مقابل واضح است که ارزش گزاره‌ی $p \Leftrightarrow q$ فقط هنگامی درست است که گزاره‌های p و q هم ارزش باشند یعنی اینکه هر دو درست و یا هر دو نادرست باشند ولی اگر ارزش گزاره‌ها با هم متفاوت باشند (یکی درست و یکی نادرست باشد) ارزش گزاره‌ی $p \Leftrightarrow q$ نادرست خواهد بود.

مثال: ارزش گزاره‌های زیر را معلوم کنید.

« اگر ۲ فرد است، آنگاه ۸ عددی اول است و برعکس »

$\underbrace{\text{۲ فرد است}}_{p}$ $\Longleftrightarrow$ $\underbrace{\text{۸ عددی اول است}}_{q}$　ارزش گزاره درست است.

نادرست　　　نادرست

« ۳۹ عددی اول است اگر و فقط اگر $\sqrt{2}$ گنگ باشد. »

$\underbrace{\text{۳۹ عددی اول است}}_{p}$ $\Longleftrightarrow$ $\underbrace{\sqrt{2}\ \text{گنگ است}}_{q}$　ارزش گزاره نادرست است.

نادرست　　　درست

سؤال امتحانی: اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های مرکب زیر را مشخص کنید.

$(\sim p \Leftrightarrow q) \vee r$

p	$\sim p$	q	$\sim p \Leftrightarrow q$	r	$(\sim p \Leftrightarrow q) \vee r$
د	ن	ن	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	د

$(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$
د	ن	ن	د	ن

مثال: اگر ارزش گزاره‌ی p درست و q نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد در این صورت ارزش گزاره‌ی مقابل:

$(r \Leftrightarrow p) \Longrightarrow p \wedge q$

الف) درست است

ب) نادرست است

ج) به ارزش r بستگی دارد. ✓

r	p	$r \Leftrightarrow p$	q	$p \wedge q$	$(r \Leftrightarrow p) \Longrightarrow p \wedge q$
د	د	د	ن	ن	ن
ن	د	ن	ن	ن	د

بنابراین ارزش این گزاره به ارزش گزاره‌ی r بستگی دارد.

مثال: اگر F به معنی نادرست بودن و T به معنی درست بودن باشد، و p گزاره‌ای دلخواه باشد، نشان دهید که:

الف) $(p \wedge \sim p) \equiv F$

ب) $(p \vee \sim p) \equiv T$

جواب الف)

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
د	ن	ن
ن	د	ن

جواب ب)

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
د	ن	د
ن	د	د

سؤال امتحانی: با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها، درستی هم ارزی‌های زیر را بررسی کنید.

$$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	د	د

واضح است که دو ستون سمت راست جدول دارای ارزش‌های یکسانی هستند.

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

واضح است که دو ستون سمت راست جدول دارای ارزش‌های یکسانی هستند.

نکته‌ی مهم: گزاره‌ی $\sim q \Rightarrow \sim p$ را عکس نقیض گزاره‌ی $p \Rightarrow q$ می‌گوییم.

قوانین دمورگان

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$
$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

تکلیف: نشان دهید که:

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۲۳۷۰۲۷۲۵۲

سؤال امتحانی: نشان دهید که اگر p و q گزاره‌های دلخواهی باشند آنگاه

$$(p\wedge\sim q)\vee(p\Rightarrow q)\equiv T$$

سؤال امتحانی: نشان دهید که اگر p و q گزاره‌های دلخواهی باشند آنگاه

$$(p\vee\sim q)\wedge(p\vee q)\equiv p$$

سؤال امتحانی: ثابت کنید که اگر n^2 زوج باشد، آنگاه n زوج است $(n\in N)$

راهنمایی: از عکس نقیض استفاده کنید

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۲۳۷۰۲۷۵۲

سؤال امتحانی: ثابت کنید که مجموع دو عدد زوج، عددی زوج است.

سؤال امتحانی: گزاره های زیر را به کمک نمادهای ریاضی بازنویسی کنید

الف) دو برابر جذر عددی برابر خودش است.

ب) مجموع معکوس‌های دو عدد بزرگتر یا مساوی مجموع آن دو عدد است.

ج) مجموع مکعبات دو عدد بزرگتر مساوی است با مجموع آن دو عدد.

د) مکعب یک عدد از هشت برابر آن عدد به علاوه ی پنج بزرگتر است.

ت) جذر عددی با نصف خودش برابر است.

سؤال امتحانی: درستی یا نادرستی استدلال زیر را مشخص کنید.
«اگر طول و عرض یک مستطیل را دو برابر کنیم، مساحت آن دو برابر می‌شود.»

سؤال امتحانی: ستون نتیجه‌ی گزاره‌ی $(p\vee q) \Rightarrow [q \Rightarrow (p\wedge q)]$ را بنویسید.

p	q	$p\vee q$	$p\wedge q$	$q\Rightarrow(p\wedge q)$	$p\vee q\Rightarrow[q\Rightarrow(p\wedge q)]$

سؤال امتحانی: اگر ارزش گزاره‌ی r درست و ارزش گزاره‌ی $(q\vee r) \Leftrightarrow q\Rightarrow p$ نادرست باشد گزاره‌ی $q\wedge p \Rightarrow r$ هم‌ارز با کدام است؟

الف) T

ب) F

ج) $r \Rightarrow p$

د) نامشخص

تعریف گزاره‌نما: هر جمله‌ی خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جایگذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل می‌شود را **گزاره‌نما** می‌گویند.

نکته: گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیر به کار رفته در آن‌ها، گزاره‌نماهای یک متغیره، دو متغیره یا ... می‌نامیم.

مثال: «x عددی زوج است.» یک گزاره‌نمای یک متغیره می‌باشد که:

الف) اگر به جای x عدد ۲ قرار بگیرد، ارزش جمله‌ی خبری درست است.

ب) اگر به جای x عدد ۳ قرار بگیرد، ارزش جمله‌ی خبری نادرست است.

مثال: «$2x + y = 7$» یک گزاره‌نمای دو متغیره می‌باشد که در آن:

الف) اگر $x=1$ و $y=5$ باشد، آنگاه $2(1)+5=7$ می‌باشد که یک گزاره‌ی درست می‌باشد.

ب) اگر $x=3$ و $y=4$ باشد، آنگاه $2(3)+4=11$ می‌باشد که یک گزاره‌ی نادرست می‌باشد.

دامنه‌ی متغیر گزاره نما: در هر گزاره نما، به مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای گزاره نما قرار داد تا این که گزاره نما تبدیل به گزاره شود را دامنه‌ی متغیر گزاره نما می‌گوئیم و آن‌ها را با حرف D نمایش می‌دهیم.

مثال: در گزاره نمای « $6=4-2x$ » دامنه‌ی متغیر گزاره نما (همان x) برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد. یعنی به جای x هر عدد حقیقی را می‌توانیم قرار دهیم تا یک گزاره حاصل شود.

مجموعه‌ی جواب گزاره نما: در هر گزاره نما به مجموعه‌ی عضوهایی از دامنه‌ی متغیر که به ازای آن‌ها گزاره نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود را مجموعه جواب گزاره نما می‌گوئیم و آن را با حرف S نشان می‌دهیم.

نکته: $S \subseteq D$

مثال: در گزاره نمای « $5x^2+7x-12=0$ »

الف) دامنه‌ی متغیر گزاره نما اعداد حقیقی است. یعنی $(D=\mathbb{R})$

ب) مجموعه جواب آن $S=\left\{1, \frac{-12}{5}\right\}$ می‌باشد.

نکته: همانطور که قبلاً گفته شد، اگر p یک گزاره باشد، نقیض آن را با $\sim p$ نشان می‌دهند و:

الف) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

ب) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

ج) $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

د) $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (\sim p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Leftrightarrow \sim q)$

با توجه به قسمت (د)، برای نقیض کردن یک گزاره‌ی دوشرطی فقط باید یکی از گزاره‌ها را نقیض کنیم.

مثال: نقیض « اگر a عددی منفی باشد، آنگاه مربع آن مثبت است » را بنویسید.

جواب: با توجه به قسمت (ج)، نقیض این گزاره‌ی شرطی به این صورت می‌باشد.

$\sim[\underbrace{\text{عددی منفی باشد } a}_{p} \Rightarrow \underbrace{\text{ مثبت است } a \text{ مربع}}_{q}] \equiv (\underbrace{\text{ عددی منفی است } a}_{p}) \wedge (\underbrace{\text{ مثبت نیست } a \text{ مربع}}_{\sim q})$

که به صورت خلاصه نقیض عبارت است از « a عددی منفی است و مربع a مثبت نیست»

مثال: نقیض گزاره‌ی «یک چهارضلعی متوازی الاضلاع است اگر و تنها اگر قطرهایش منصف یکدیگر باشند» را بنویسید.

نقیض این گزاره را به دو صورت مختلف می‌توانیم بنویسیم:

الف) یک چهارضلعی متوازی الاضلاع نیست اگر و تنها اگر قطرهایش منصف یکدیگر باشند.

ب) یک چهارضلعی متوازی الاضلاع است اگر و تنها اگر قطرهایش منصف یکدیگر نباشند.

عبارتهای «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» به سور معروف هستند. که این عبارتها می‌توانند قبل از گزاره نماها قرار بگیرند و گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد کنند.

نکته:

الف) به جای استفاده از عبارت «به ازای هر» از نماد $\forall$ استفاده می‌کنیم.

ب) به جای استفاده از عبارت «وجود دارد» یا «به ازای بعضی مقادیر» از نماد $\exists$ استفاده می‌کنیم.

در این صورت:
- $\forall$: نماد سور عمومی است.
- $\exists$: نماد سور وجودی است.

مثال: گزاره‌های زیر را به زبان ریاضی بیان کنید.

الف) مربع هر عدد حقیقی نامنفی است. $\forall x\in R:\ x^2\geq 0$

ب) نصف هر عدد صحیح، از خود آن عدد کوچکتر است. $\forall x\in Z:\ \frac{x}{2}<x$

ج) بعضی از اعداد اول زوج هستند. $\exists x\in P:\ x=2k\ ,(k\in N)$

د) جذر بعضی از اعداد طبیعی از خودشان بزرگتر است. $\exists x\in N:\ \sqrt{x}>x$

نکته‌ی مهم: گزاره‌های با سور عمومی وقتی درست می‌باشند که مجموعه‌ی جواب آنها با دامنه‌ی متغیر آنها یکسان باشد، به عبارت دیگر: هیچ مثال نقضی نداشته باشند.

نکته‌ی مهم: گزاره‌های با سور وجودی زمانی درست هستند که مجموعه جواب آنها تهی نباشد.

مثال: گزاره های زیر را به زبان ریاضی بیان کنید و سپس ارزش آنها را معلوم کنید.

الف) بعضی از اعداد اول زوج هستند. $\exists x \in P : x = 2k, (k \in N)$

این گزاره درست است زیرا عدد ۲ در آن صدق می کند و مجموعه جواب $= \{2\}$ که تهی نیست

ب) مربع هر عدد طبیعی از خود آن عدد بزرگتر است. $\forall x \in N : x^2 > x$

این گزاره غلط است زیرا عدد 1 (که طبیعی است) در آن صدق نمی کند و در واقع عدد 1 مثال نقض برای آن می باشد.

سؤال امتحانی: درستی یا نادرستی گزاره های سوری زیر را مشخص کنید.

الف) $\exists x \in N : x^2 - 1 = 0$

ب) $\forall x \in R : |x| \geq 0$

ج) $\exists x \in P : x = 2k$

د) $\forall x \in E : x \notin P$

ه) $\exists x \in R : x^2 + 1 = 0$

ت) $\exists x \in Z : x^2 = x$

ه) $\forall x \in R , x^2 > 0$

ت) $\exists y \in R ; y < 0 , y^2 > 3$

س) $\exists m \in R : \frac{2m - 8}{5} = 0$

ش) $\forall n \in N ; (2^n + 1) \in P$

ر) $\exists x \in R ; x^2 - 3x + 2 = 0$

سؤال امتحانی: هرگاه $A=\{x\in \mathbb{Z} \mid 0<x\le 5\}$ دامنه‌ی متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را معلوم کنید.

الف) $\exists x\in A;\ x+4=10$

ب) $\exists x\in A;\ x+3\le 4$

ج) $\forall x\in A,\ x+2\le 9$

د) $\forall x\in A;\ (x-1)\in \mathbb{N}$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۲۳۷۰۲۷۲۵۲

نمونه‌ی سؤالات امتحانی:

۱- الف) مجموعه‌ی توانی $A=\{2,0,3\}$ را بنویسید.

ب) مجموعه‌ی A چهار عضو بیشتر از مجموعه‌ی B دارد. و همچنین ۱۲۰ زیرمجموعه بیشتر از B دارد. مشخص کنید که مجموعه‌ی B چند عضو دارد.

تعریف: فرض کنید A یک مجموعه‌ی غیرتهی باشد. در این صورت می‌گوییم:
A به n ($n\in N$) زیرمجموعه‌ی A_1 ، A_2 و A_3 و ..... و A_n افراز شده است، اگر سه شرط زیر را داشته باشد.

الف) $A_i\neq\phi$ ، $1\leq i\leq n$ (هیچ یک از زیرمجموعه‌ها تهی نباشند.)

ب) برای هر $i\neq j$ ، $A_i\cap A_j=\phi$ (زیرمجموعه‌ها دو به دو جدا از هم باشند)

ج) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=A$ (اجتماع همه‌ی زیرمجموعه‌ها برابر خود مجموعه‌ی اصلی باشد)

مثال: می‌دانیم که اعداد اول کمتر از ۱۵ عبارتند از $A=\{2,3,5,7,11,13\}$
یک افراز دلخواه از این مجموعه عبارت است از: $A_1=\{2,5\}$ و $A_2=\{3,7,11\}$، $A_3=\{13\}$

زیرا:

الف) هیچ کدام از این زیرمجموعه‌ها تهی نیستند.

ب) هیچ کدام از آنها با هم اشتراک ندارند.

ج) $\{2,5\}\cup\{3,7,11\}\cup\{13\}=\{2,3,5,7,11,13\}=A$

سؤال امتحانی: اگر $A_n=\{n,n+1,\dots,2^n\}$ باشد، مجموعه‌ی $(\bigcup_{n=1}^{3}A_n)-A_1$ چند عضو دارد.

$A_1=\{1,2\}$ ، $A_2=\{2,3,4\}$ ، $A_3=\{3,4,5,6,7,8\}$

$$\begin{aligned}(\bigcup_{n=1}^{3}A_n)-A_1&=(A_1\cup A_2\cup A_3)-A_1\\&=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}-\{1,2\}\\&=\{3,4,5,6,7,8\}\end{aligned}$$

نکته: دو زوج مرتب $(a,b),(c,d)$ زمانی باهم برابرند که مؤلفه‌های اول آنها باهم، و مؤلفه‌های دوم آنها نیز باهم برابر باشند.

مثال: اگر دو زوج مرتب $(32,4x+y)$ و $(2^{x-y},10)$ باهم برابر باشند، زوج مرتب (x,y) کدام است؟

الف) $(2,2)$

ب) $(3,-2)$

ج) $(6,1)$ ✓

د) $(4,-1)$

$$2^{x-y}=32=2^5 \Rightarrow \begin{cases}x-y=5\\4x+y=10\end{cases}$$

$$5x=15$$

$$x=\frac{15}{5}=3$$

$$4x+y=10$$

$$12+y=10$$

$$y=10-12=-2$$

$$(x,y)=(3,-2)$$

نکته‌ی مهم: ضرب دکارتی مجموعه‌ی A در مجموعه‌ی B را با $A\times B$ نمایش می‌دهیم که:

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,\ y\in B\}$$

یعنی $A\times B$ مجموعه‌ی تمام زوج مرتب‌های (x,y) است که در آن مؤلفه‌ی اول عضو A و مؤلفه‌ی دوم عضو B می‌باشد.

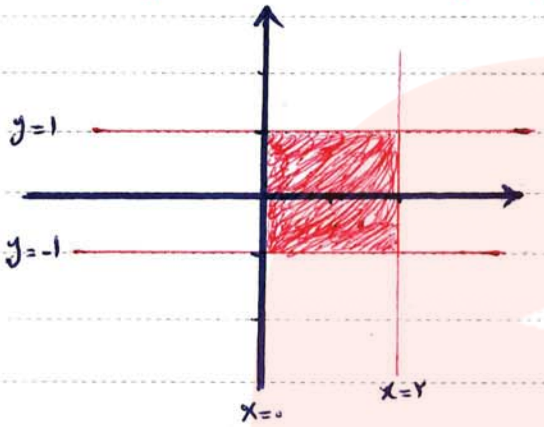
مثال: اگر $A=\{1,2\}$ و $B=\{-1,0\}$ باشد، $A\times B$ و A^2 را با اعضا مشخص کنید.

$$\begin{aligned}A\times B&=\{(x,y)\mid x\in A,\ x\in B\}=\{(x,y)\mid x\in\{1,2\}\wedge y\in\{-1,0\}\}\\&=\{(1,-1),(1,0),(2,-1),(2,0)\}\end{aligned}$$

$$A^2=A\times A=\{(x,y)\mid x\in A,\ x\in A\}=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

مثال: اگر $A=[0,2]$ و $B=[-1,1]$ باشد نمودار مجموعه های $A\times B$ و $B\times A$ را در صفحه نمایش دهید.

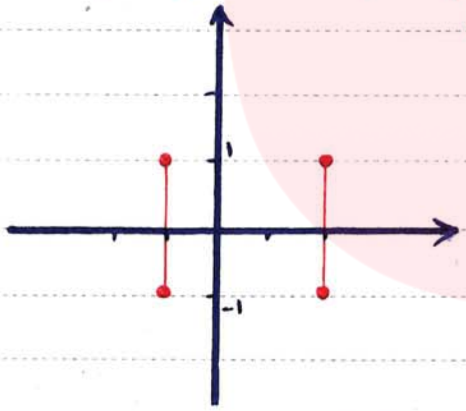
$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\wedge y\in B\}=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 2\ ,\ -1\leq y\leq 1\}$$



که با رسم خطوط $x=0$، $x=2$ و $y=1$ و $y=-1$ نمودار $A\times B$ به صورت مقابل خواهد بود.

مثال: اگر $A=[-1,1]$ و $B=\{-1,2\}$ باشد نمودار $B\times A$ را رسم کنید.

$$B\times A=\{(x,y)\mid x\in B\wedge y\in A\}=\{(x,y)\mid x\in\{-1,2\}\wedge y\in[-1,1]\}$$
$$=\{(x,y)\mid (x=-1\vee x=2)\wedge -1\leq y\leq 1\}$$



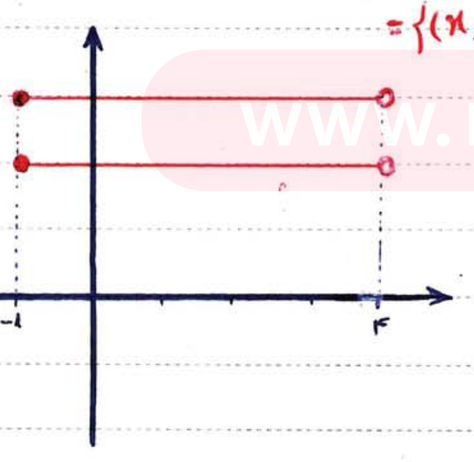
که با رسم خطوط $x=2$ و $x=-1$ قسمتهایی را درنظر می گیریم که مقدار y بین 1 و -1 باشد.

مثال: فرض کنید $A=\{2,3\}$ و $B=[-1,4)$ باشد

الف) ابتدا مجموعه ی $B\times A$ را تشکیل دهید.

ب) نمودار مختصاتی آن را رسم کنید.

$$B\times A=\{(x,y)\mid x\in B\wedge y\in A\}=\{(x,y)\mid x\in[-1,4)\wedge y\in\{2,3\}\}$$
$$=\{(x,y)\mid -1\leq x<4\wedge(y=2\vee y=3)\}$$



که باید ابتدا خطوط $y=2, y=3$ را رسم کنیم و سپس قسمتهایی را درنظر می گیریم که در آنها $-1\leq x<4$ باشد.

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی
همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

نکته: برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه A و B از مجموعه‌ی مرجع U تساوی‌های زیر برقرارند که به آنها قوانین دمورگان گفته می‌شود.

قوانین دمورگان
$$\begin{cases}(A\cup B)' = A'\cap B' \\ (A\cap B)' = A'\cup B'\end{cases}$$

مثال: با استفاده از روش عضوگیری و تعریف تساوی دو مجموعه نشان دهید که:

$$(A\cup B)' = A'\cap B'$$

$$\forall x;\ x\in (A\cup B)' \Rightarrow x\notin (A\cup B) \Rightarrow x\notin A \wedge x\notin B$$
$$\Rightarrow x\in A' \wedge x\in B'$$
$$\Rightarrow x\in (A'\cap B')$$

بنابراین: $(A\cup B)' \subseteq (A'\cap B')$ (۱)

$$\forall x;\ x\in (A'\cap B') \Rightarrow x\in A' \wedge x\in B' \Rightarrow x\notin A \wedge x\notin B$$
$$\Rightarrow x\notin (A\cup B)$$
$$\Rightarrow x\in (A\cup B)'$$

بنابراین: $(A'\cap B') \subseteq (A\cup B)'$ (۲)

$$(۱), (۲) \Rightarrow (A\cup B)' = A'\cap B'$$

نکته: دو مجموعه‌ی A, B هنگامی مساوی هستند که $A\subseteq B, B\subseteq A$ باشد.

مثال: مجموعه‌های $A=\{1,2\}, B=\{2,1\}$ با هم مساوی‌اند زیرا:
$A\subseteq B,\ B\subseteq A$

مثال مهم: با استفاده از جبر مجموعه‌ها، تساوی زیر را ثابت کنید.

$$(A\cap B)-(A\cap C) = A\cap (B-C)$$

اثبات:

$$(A\cap B)-(A\cap C) = (A\cap B)\cap (A\cap C)'$$
$$= (A\cap B)\cap (A'\cup C')$$
$$= [(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C']$$
$$= [(A\cap A')\cap B]\cup[A\cap (B\cap C')]$$
$$= [\varnothing\cap B]\cup[A\cap (B-C)]$$
$$= \varnothing\cup[A\cap (B-C)]$$
$$= A\cap (B-C)$$

نکته: $A-B = A\cap B'$

$(A\cap B)' = A'\cup B'$

$A\cap (B\cup C) = (A\cap B)\cup (A\cap C)$

دانستن این نکات برای اثبات مسأله لازم است.