

فصل اول

مجموعه ، القو و دنباله

درس اول : مجموع های هتتاهی و ناهتتاهی

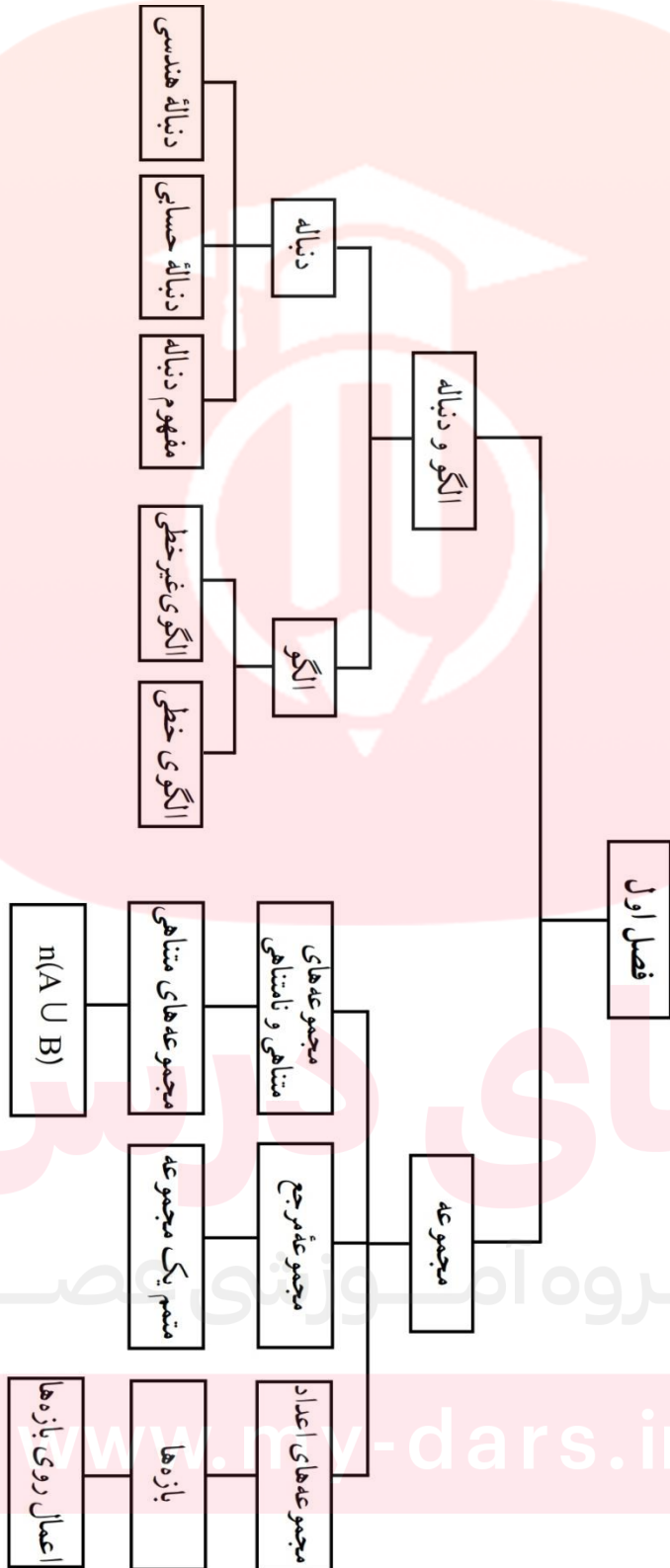
درس دوم : هتتاه یک مجموعه

درس سوم : القو و دنباله

درس چهارم : دنباله حسابی و هتتاهی

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir



درس اول : مجموعه های منتهای و نامتناهی

مجموعه اعداد :

مجموعه اعداد طبیعی : $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

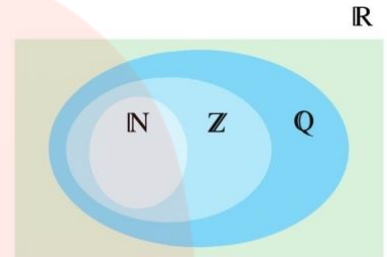
مجموعه اعداد حسابی : $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

مجموعه اعداد صحیح : $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه اعداد گویا : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$

مجموعه اعدادی که نتوان آنها را به صورت $\mathbb{Q}' =$ نسبت دو عدد صحیح نمایش داد.
مجموعه اعداد گنگ

مجموعه اعداد حقیقی : $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$



سوال :

الف) $R - Q$ چه مجموعه ای است ؟

ب) $Z - W$ چه مجموعه ای است ؟

ج) $W - N$ چند عضو دارد ؟

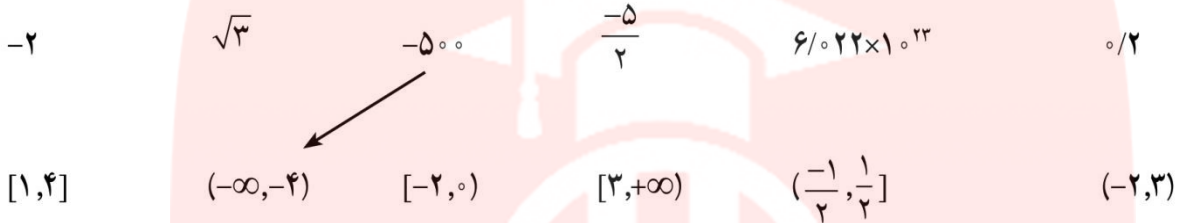
بازه ها :

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه ای	نمایش هندسی
باز	(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
بسته	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
نیم باز			
نیم باز			
باز	$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
نیم باز			
باز	$(-\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	
نیم باز			

سوال : درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید :

- الف) $\frac{4}{3} \in [\frac{1}{3}, 2)$ ب) $-2 \in (-2, 0)$ پ) $0 \in (-2, 0)$ ت) $-2 \in \{-2, 0\}$ ث) $-1 \in \{-2, 0\}$
 ج) $[-1, 2] \subseteq (-1, 2)$ چ) $\{0, 1\} \subseteq [-1, 2)$ ح) $\emptyset \subseteq (-17, 0)$ خ) $[2, 5) = (2, 5]$ د) $\sqrt{2} \in (0, 1)$

سوال : هر یک از اعداد زیر عضو یک یا چند تا از بازه های داده شده هستند . هر عدد را به بازه یا بازه های نظیر آن وصل کنید .



سوال : نمایش هندسی دو بازه $A = (-4, 2]$ و $B = (-1, 3]$ را روی محور رسم کرده و حاصل عبارت های زیر را بنویسید .



- الف) $A \cap B$ ب) $A \cup B$ پ) $A - B$ ت) $B - A$

سوال : اگر $A = \{x \in R \mid -2 < x \leq 2\}$ و $B = \{x \in R \mid x \leq 1\}$ و $C = \{x \in R \mid x > 0\}$ مجموعه های زیر را مشخص کنید .



- الف) $(A \cup B) \cap C$

- ب) $(A \cap C) \cup B$

- ج) $A - (B \cup C)$

سوال : حاصل هر یک از مجموعه های زیر را بنویسید .

الف) $(-\infty, 6] \cap (2, 9)$

ب) $(-3, 0) \cup (-2, 5]$

ج) $(-\infty, 1) \cup [1, +\infty)$

د) $(3, +\infty) \cap (6, 10]$

ه) $[2, 4) - (3, +\infty)$

و) $(3, +\infty) - [2, 4)$

سوال : مجموعه $\mathbb{R} - \{2\}$ را روی محور نمایش داده و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید .

مجموعه منتهای : هر مجموعه که بتوان تعداد اعضای آن را با یک عدد حسابی بیان کرد .
مجموعه نامنهای : هر مجموعه که نتوان تعداد اعضای آن را با یک عدد بیان کرد . در واقع تعداد آن از هر عدد قابل تصویری بزرگتر باشد .

گروه آموزشی عصر

سوال : کدام یک از مجموعه های زیر منتهای و کدام یک نامنهای است ؟

الف) مجموعه اعداد گویای بین ۰ و ۰.۱ .
 ب) مجموعه اعداد ۱۰۰ رقمی .

ج) مجموعه اعداد طبیعی فرد .
 د) مجموعه مقسوم علیه های عدد ۴۰ .

ه) مجموعه مضرب های عدد ۳
 ز) مجموعه تمام درختان جنگل آمازون

www.maydars.ir

سوال : دو مجموعه نامتناهی نام ببرید که یکی زیر مجموعه دیگری باشد .

سوال : دو مجموعه نامتناهی بنویسید که دارای اشتراک متناهی باشند .

سوال : دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که تفاضل آنها دو عضو داشته باشد .

سوال : جاهای خالی را با عبارت « متناهی » یا « نامتناهی » و یا « نامعلوم » پر کنید .

الف) اگر $A \subset B$ و A مجموعه ای نامتناهی باشد ، آنگاه مجموعه B ، است .

ب) اگر $A \subset B$ و A مجموعه ای متناهی باشد ، آنگاه مجموعه B ، است .

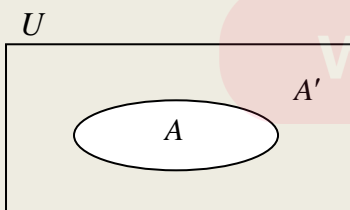
ج) اگر $A \subset B$ و B مجموعه ای نامتناهی باشد ، آنگاه مجموعه A ، است .

د) اگر $A \subset B$ و B مجموعه ای متناهی باشد ، آنگاه مجموعه A ، است .

مای درس

درس دوم : متمم مجموعه

مجموعه مرجع : در هر مبحث مجموعه ای ، یک مجموعه بزرگ وجود دارد که همه مجموعه ها زیر مجموعه آن هستند و به آن مجموعه مرجع می گویند و معمولاً با U نمایش می دهند .



متمم مجموعه A : اگر مجموعه A زیر مجموعه ای از مجموعه مرجع U باشد ،

مجموعه $U - A$ را متمم مجموعه A می نامند و معمولاً با A' نمایش می دهند .

در واقع A' مجموعه ای از اعضای U است که در A نباشد .

سوال : با تصور نمودار ون هر قسمت ، طرف دوم تساوی را بنویسید .

$$\begin{array}{lll}
 A \cup U = & A \cup A' = & \phi' = \\
 A \cap U = & A \cap A' = & U' = \\
 A - U = & A - A' = & (A')' = \\
 U - A & A' - A = &
 \end{array}$$

سوال : با توجه به مجموعه های مرجع داده شده ، متمم هر مجموعه را مقابل آن بنویسید .

مجموعه A	مجموعه مرجع	مجموعه A'
$(-1, 2]$	R	
$[1, +\infty)$	R	
W	R	
W	Z	
$\{x \in Z \mid -3 < x \leq 2\}$	Z	
$\{2, 5, 8, 11, \dots\}$	N	
مضارب ۲ یا ۳	$\{1, 2, 3, \dots, 20\}$	

سوال : اگر Z مجموعه مرجع باشد ، مجموعه ای نامتناهی مانند A مثال بزنید که A' متناهی باشد .

سوال : اگر N مجموعه مرجع باشد ، مجموعه ای نامتناهی مانند A مثال بزنید که A' هم نامتناهی باشد .

www.my-dars.ir

سوال : اگر $U = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ مجموعه مرجع و A مجموعه مقسوم علیه های عدد ۱۲ و $B = \{2, 3, 5, 9\}$ باشد . مطلوبست :

$$A' = \qquad B' =$$

$A \cap B' =$

$A' \cap B =$

$A \cup B' =$

$A' \cup B =$

$A' \cap B' =$

$(A \cup B)' =$

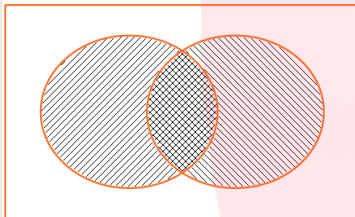
$A' \cup B' =$

$(A \cap B)' =$

نکته مهم: همان طور که در دو سطر آخر سوال قبل دیده می شود، همواره: $A' \cup B' = (A \cap B)'$ و $A' \cap B' = (A \cup B)'$

تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه:

آیا می توان گفت تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه A و B برابر با مجموع تعداد اعضای تک تک آنهاست؟



توجه شود در صورتی که بگوییم $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ در این صورت طبق نمودار ون مقابل، در واقع قسمت اشتراک دو مجموعه ۲ بار شمرده شده است.

پس می توان گفت: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - \dots\dots\dots$

سوال: در میان ۳۵ نفر اهالی یک محل، ۲۰ نفر روزنامه A ، ۱۸ نفر روزنامه B و ۶ نفر هیچ کدام را نمی خوانند.

الف) چند نفر هر دو روزنامه را می خوانند؟

ب) چند نفر حداقل یکی را می خوانند؟

ج) چند نفر فقط روزنامه A را می خوانند؟

د) چند نفر فقط روزنامه B را می خوانند؟

سوال: در بین ۷۱ نفر، ۳۶ نفر عضو تیم فوتبال و ۲۷ نفر عضو تیم والیبال هستند و ۱۲ نفر عضو هر دو تیم هستند.

الف) چند نفر عضو هیچ تیمی نیست؟

ب) چند نفر عضو حداقل یکی از دو تیم است؟

ج) چند نفر فقط عضو یکی از دو تیم است؟

سوال : اگر A, B از مجموعه مرجع U باشند و $n(U) = 100$ و $n(A) = 60$ و $n(B) = 40$ و $n(A \cap B) = 20$ مطلوبست :

$$n(A \cup B) =$$

$$n(A \cup B') =$$

$$n(A' \cap B') =$$

$$n(A' \cup B') =$$

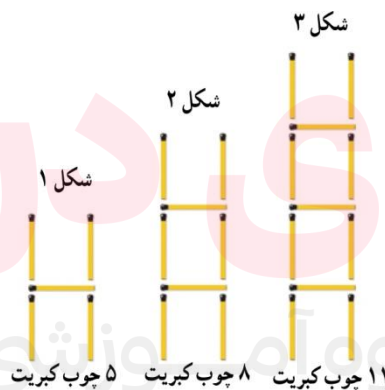
مجموعه های مجزا : دو مجموعه که با هم اشتراکی نداشته باشند را مجزا می نامند .

سوال : برای دو مجموعه مجزا $n(A \cup B)$ برابر است با :

سوال : به کمک نمودار ون ، نشان دهید دو مجموعه $A - B, A \cap B$ مجزا هستند .

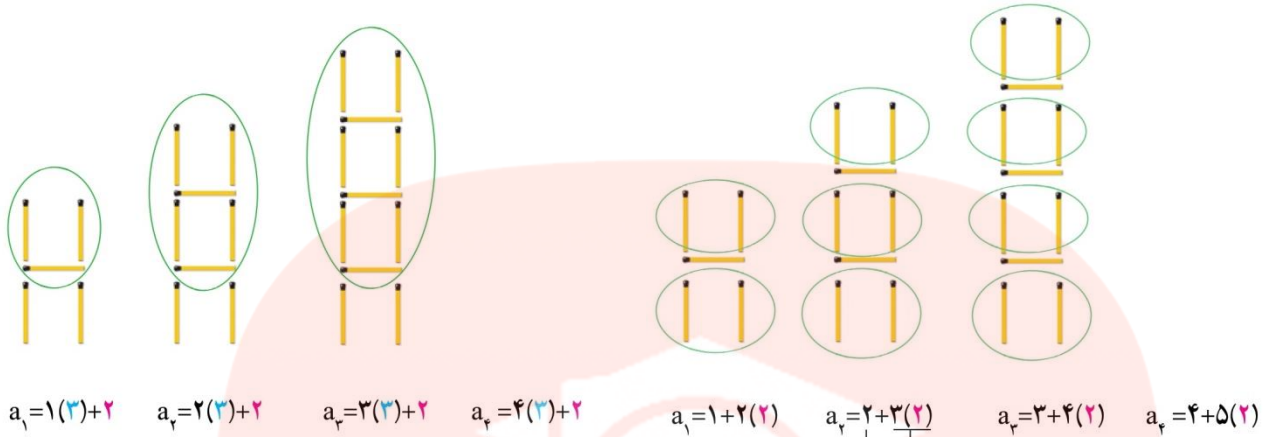
درس سوم : الگو و دنباله

به شکل های زیر و تعداد چوب کبریت های به کار رفته در هر یک از آنها توجه کنید . می خواهیم جدول زیر شکل را کامل کنیم .



n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	...	n	...
a_n : تعداد چوب کبریت ها	۵	۸	۱۱	$a_n = \dots$...
رابطه بین n و a_n	$a_1 = 5$	$a_2 = 8$	$a_3 = 11$	$a_n = \dots$...

به دو روش زیر برای یافتن الگو دقت کنید .



روش اول جمله n را برابر با $a_n = 3n + 2$ و روش دوم آن را به صورت $a_n = n + (n+1)(2)$ بدست می دهد که هر دو یکسان هستند .

سوال : شما با روش دیگری یک الگو برای یافتن تعداد چوب کبریت ها بیابید .

سوال : در شکل بیستم تعداد چوب کبریت ها چقدر است ؟

سوال : در چندمین شکل از الگوی بالا تعداد چوب کبریت ها ۷۷ قطعه است ؟

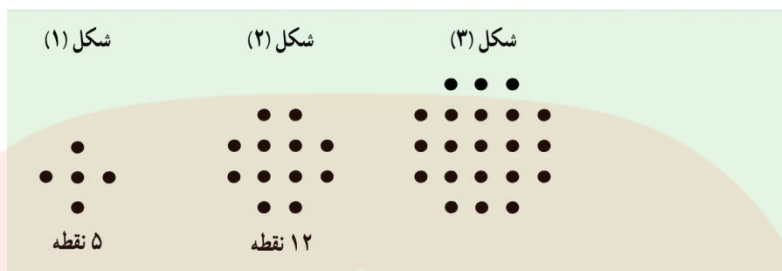
جمله عمومی : جمله n ام یک الگو را که نشان دهنده ساختار جملات الگو است ، جمله عمومی می گویند که معمولاً با a_n نمایش داده می شود .

الگوی خطی : هر الگویی که اختلاف جملات متوالی آن عدد ثابتی است را الگوی خطی می نامند و جمله عمومی الگوی خطی همواره به صورت معادله یک خط است یعنی به صورت $t_n = an + b$ است .

www.my-dars.ir

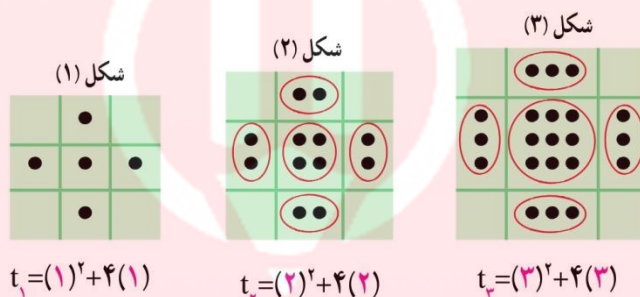
سوال : در یک الگوی خطی جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ است . جمله بیستم را بیابید .

به شکل های زیر و تعداد نقاط به کار رفته در هر یک از آنها توجه کنید . می خواهیم جدول زیر شکل را کامل کنیم .



شماره شکل : n	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد نقطه ها : t_n	۵	۱۲
رابطه بین n و t_n	$t_1=5$	$t_2=$

به روش زیر برای یافتن الگو دقت کنید .



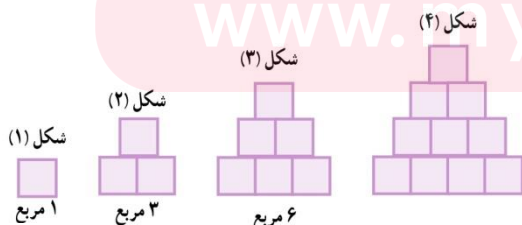
سوال : با توجه به این الگو ، شکل شماره n شامل چند نقطه است ؟

سوال : با روش دیگری یک الگو برای یافتن تعداد نقاط بیابید .

دنباله : هر تعداد از اعداد را که پشت سر هم بنویسیم ، یک دنباله نامیده می شود و این اعداد را جملات دنباله می نامند . و جمله n ام آن را جمله عمومی دنباله می نامند .

توجه : لزوماً هر دنباله دارای الگو نیست . و همانطور که دیدیم لزوماً هر دنباله الگو دار خطی نیست .

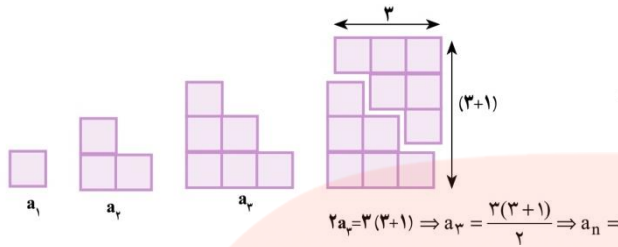
www.my-dars.ir



الگوی مقابل را در نظر بگیرید .

الف) تعداد مربع ها را تا ۶ مرحله به صورت دنباله بنویسید .

ب) آیا دنباله فوق خطی است ؟ چرا ؟

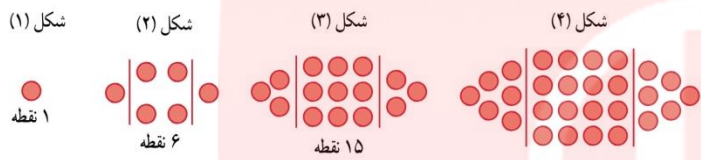


پ) با دقت در تصویر مقابل جمله عمومی را بنویسید .

ت) به کمک الگوی قبل حاصل جمع اعداد طبیعی از ۱ تا n را بیابید .

$$1 + 2 + 3 + \dots + n =$$

سوال : الگوی مقابل را در نظر بگیرید .



الف) تعداد نقاط را تا ۵ مرحله به صورت دنباله بنویسید .

ب) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد ؟

سوال : جمله عمومی دنباله های زیر را بنویسید .

الف) $-1, 8, -27, 64, -125, \dots$

ب) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

ج) $3, 5, 7, 9, \dots$

د) $\frac{2}{1}, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \dots$

سوال : جمله عمومی دو دنباله داده شده است . چهار جمله اول هر یک از دنباله ها را بنویسید .

الف) $a_n = 2n + 3$

ب) $b_n = n^2 + n$

ج) $c_n = 2n^2$

د) $d_n = 3n - 2$

مای درسی

گروه آموزشی مدرس

www.my-dars.ir

سوال : جمله چندم دنباله $a_n = \frac{2n-2}{n-4}$ برابر ۳ است ؟

سوال : جمله چندم دنباله $a_n = 3n - 2$ برابر ۱۶ است ؟

درس چهارم : دنباله حسابی و هندسی

دنباله حسابی : نام دیگر الگوی خطی ، دنباله حسابی است و در واقع دنباله ای است که هر جمله آن به جز جمله اول ، از جمع جمله قبلی با یک عدد ثابت ، بوجود آمده است . این عدد ثابت را قدر نسبت دنباله حسابی می گویند و معمولاً با d نمایش می دهند .

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	...	t_n	...
t_1	$t_1 + d$	$t_1 + 2d$	$t_1 + 3d$...	$t_1 + (\dots)d$...

$\xrightarrow{+d}$ $\xrightarrow{+d}$ $\xrightarrow{+d}$

در نتیجه جمله عمومی دنباله حسابی به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است .

سوال : جمله عمومی دنباله های زیر را نوشته و به کمک آن جمله ۲۰ ام را بیابید .

الف) ۳, ۷, ۱۱, ۱۵, ...

ب) ۱۲, ۷, ۲, -۳, ...

ج) $\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{11}{3}, \dots$

د) $\frac{1}{5}, \frac{5}{5}, \frac{9}{5}, \frac{13}{5}, \dots$

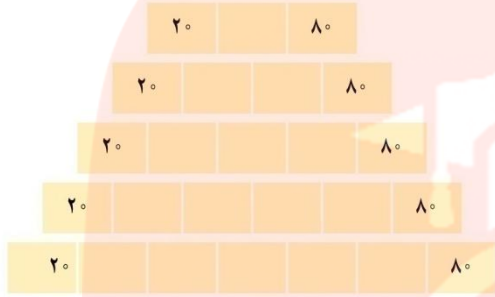
مای درسی

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

سوال : سه واسطه حسابی بین ۱۸ و ۶۲ درج کنید .

سوال : بین ۲۰ و ۸۰ به تعداد مشخص شده در هر مورد ، واسطه حسابی درج کنید .



سوال : جملات دوم و ششم یک دنباله حسابی ۷ و ۲۳ است . قدر نسبت، جمله اول و جمله عمومی را بیابید .

سوال : در یک دنباله حسابی جمله سوم و هفتم به ترتیب ۲ و ۵۶ است . جمله بیستم آن را بیابید .

مای دررس

سوال : در یک دنباله حسابی ، مجموع سه جمله اول ۳ و مجموع سه جمله بعدی ۳۹ است . دنباله را بنویسید .

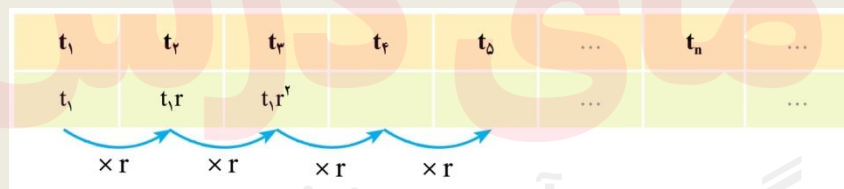
www.my-dars.ir

سوال : در یک دنباله حسابی ، مجموع سه جمله اول ۲۱ و مجموع سه جمله بعدی ۵۷ است . دنباله را بنویسید .

سوال : در دنباله حسابی مجموع جملات هفتم و دوم برابر ۶ و تفاضل جمله چهارم از جمله دوازدهم ۵ است . جمله اول دنباله را بیابید .

سوال : در دنباله حسابی مجموع جملات سوم و پنجم برابر ۲۰ و مجموع جمله چهارم و هفتم ۲۹ است . قدر نسبت دنباله را بیابید .

دنباله هندسی : دنباله ای است که هر جمله آن به جز جمله اول ، از ضرب جمله قبلی با یک عدد ثابت ، بوجود آمده است . این عدد ثابت را قدر نسبت دنباله هندسی می گویند و معمولاً با r نمایش می دهند .



در نتیجه جمله عمومی دنباله هندسی به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است .

سوال : جمله عمومی دنباله های زیر را بنویسید . www.my-dars.ir

الف) ۳, ۶, ۱۲, ۲۴, ...

ب) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots$

ج) $5, -15, 45, -135, \dots$

د) $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$

سوال : سه واسطه حسابی بین ۳ و ۴۸ درج کنید .

سوال : بین 2^0 و 8^0 به تعداد مشخص شده در هر مورد ، واسطه حسابی درج کنید .



سوال : جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی ۱۲ و ۹۶ است . قدر نسبت، جمله اول و جمله عمومی را بیابید .

مای دررس

گروه آموزشی عصر

سوال : در یک دنباله هندسی جمله ششم ۸ برابر جمله دوم است و تفاضل جمله سوم از جمله چهارم ۱۲ است . دنباله را بنویسید.

www.my-dars.ir

سوال : دنباله ای بنویسید که هم حسابی باشد و هم هندسی .

سوال : حاصل ضرب ۲۰ جمله اول دنباله هندسی $۲, ۴, ۸, \dots$ را بدست آورید .

توجه : اگر چیزی با مقدار اولیه t_1 دارای رشد p درصدی در دوره های یکسان باشد ، یک دنباله هندسی با قدر نسبت $r = 1 + p$ ایجاد می شود :

t_1	t_2	t_3	t_4	...	t_n	...
t_1	$t_1 + pt_1$	$t_1 + pt_1$	$t_1 + pt_1$		$t_{n-1} + pt_{n-1}$	
t_1	$t_1(1+p)$	$t_1(1+p)^2$	$t_1(1+p)^3$		$t_1(1+p)^{n-1}$	

در نتیجه پس از گذشت n دوره ، مقدار آن چیز برابر است با : $t_{n+1} = t_1(1+p)^n$

به همین ترتیب اگر آن چیز دارای کاهش p درصدی در دوره های یکسان باشد ، پس از گذشت n دوره : $t_{n+1} = t_1(1+p)^n$

سوال : علی دوچرخه اش را ۵۰۰ هزار تومان خرید . با فرض آنکه هر سال ۲۰ درصد از قیمت آن کاهش بیابد ، حساب کنید پس از ۳ سال قیمت دوچرخه چقدر است ؟ پس از n سال چطور ؟

سوال : اگر ۵ میلیون تومان در بانکی با سود ۱۵ درصد به عنوان سپرده بگذاریم ، پس از ۵ سال مقدار موجودی سپرده ما چقدر خواهد بود ؟

www.my-dars.ir

سوال : توپی از ارتفاع ۲۰ متری رها می شود ، اگر پس از هر بار برخورد با زمین ۳۰ درصد از ارتفاع آن کاسته شود، پس از ۵ بار به زمین خوردن ، ارتفاع توپ چقدر است ؟

سوال : اگر قانون یک شرکت برای افراد تازه استخدام شده این باشد که حقوق اولیه ۵۰۰ هزار تومان باشد و در سال اول هر ماه ۱۰ درصد به حقوق آن ها افزوده شود ، در پایان سال اول حقوق کارگران چقدر خواهد بود ؟

روش تشخیص و یافتن جمله عمومی دنباله درجه ۲ :

دنباله ای که تفاضل متوالی جملات در دو مرحله به اعداد ثابتی ختم می شود دارای جمله عمومی درجه دوم به صورت $a_n = an^2 + bn + c$ هستند که a و b و c اعداد معلوم می باشند . پس :

$$a + b + c = a_1 \quad \text{و} \quad 4a + 2b + c = a_2 \quad \text{و} \quad 9a + 3b + c = a_3$$

و از تفاضل دو تساوی اول و دو تساوی دوم و نهایتاً تفاضل این دو تساوی بدست آمده ابتدا a را یافته و با جایگذاری در مراحل قبل b و c را نیز می یابیم .

مثال : جمله عمومی دنباله درجه دوم $5, 12, 22, 35, 51, \dots$ را بیابید .

$a + b + c = 5$	$\xrightarrow{c=1}$	$3a + b = 4$	$\xrightarrow{b=5/2}$	$a = 3/2$
$4a + 2b + c = 12$	$\xrightarrow{c=1}$	$2a = 3$	\Rightarrow	$a = 3/2$
$9a + 3b + c = 22$	$\xrightarrow{c=1}$	$5a + b = 10$		

نتیجه : برای یافتن جمله عمومی کافیست بدانیم :

سوال : جمله عمومی دنباله درجه دوم $3, 9, 17, 29, \dots$ را بنویسید .
www.my-dars.ir