

## فصل اول: آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

تعریف گزاره: به هر جمله‌ی خبری که بتوانیم (در حال حاضر یا در آینده) دقیقاً یکی از دو ارزش درست یا نادرست را به آن نسبت دهیم، یک گزاره گفته می‌شود.

مثال: هر یک از جملات زیر یک گزاره هستند.

الف) عدد ۷ فرد است.

ب) سعدی یک ریاضیدان است.

ج) شیراز پایتخت ایران است.

$$د) ۴ + ۷ = ۱۱$$

ه) حاصل  $۳ \times ۵$  برابر ۱۶ است.

ت) پروین اعتصامی یک شاعر است.

نکته: جمله‌های غیر خبری گزاره نیستند.

مثال: جملات زیر به دلیل غیر خبری بودن، گزاره نیستند.

الف) چه هوای خوبی.

ب) شما چند سال دارید؟

ج) به سمت من بیا.

نکته مهم: با توجه به تعریف گزاره، جمله‌های خبری که نتوانیم ارزش آنها (درست یا نادرست)

مشخص کنیم، گزاره نیستند.

مثال: جملات زیر گزاره نیستند.

الف) ریاضی از عربی آسانتر است.

ب) رنگ قرمز زیباتر از سبز است.

مثال: دو گزاره‌ی درست و دو گزاره‌ی نادرست بیان کنید.

تمام اعداد اول فرد هستند.

عدد ۴ زوج است.

$$۸ - ۲ \times ۳ = ۱۸$$

گزاره‌های نادرست

۷۲ گنگ است.

گزاره‌های درست

مثال: در جمله بنویسید که گزاره نباشد.

الف) پاییز از زمستان زیباتر است.

ب) شما با چه ورزشی علاقه دارید.

نکته: در منطق ریاضی، هر گزاره را با یکی از حروف انگلیسی مانند  $P$  یا  $Q$  یا  $R$  یا ... نمایش می‌دهیم

در جدول زیر وضعیت ارزشی یک، دو و سه گزاره مشخص شده‌اند.

$P$
$>$
$\text{ن}$

$P$	$Q$
$>$	$>$
$>$	$\text{ن}$
$\text{ن}$	$>$
$\text{ن}$	$\text{ن}$

$P$	$Q$	$R$
$>$	$>$	$>$
$>$	$>$	$\text{ن}$
$>$	$\text{ن}$	$\text{ن}$
$>$	$\text{ن}$	$>$
$\text{ن}$	$>$	$>$
$\text{ن}$	$>$	$\text{ن}$
$\text{ن}$	$\text{ن}$	$>$
$\text{ن}$	$\text{ن}$	$\text{ن}$

نکته مهم: اگر  $P$  یک گزاره باشد، نقیض آن را با  $\sim P$  نمایش می‌دهیم و آن را به صورت «**نقیض  $P$** » می‌خوانیم.

$P$	$\sim P$
$>$	$\text{ن}$
$\text{ن}$	$>$

نکته: از آنجا که هر گزاره یک جمله‌ی خبری است (و متغیر دارای فعل است) برای بیان نقیض یک گزاره فقط کافی است که فعل جمله را منفی کنیم

در این صورت اگر ارزش گزاره‌ی  $P$  درست باشد، ارزش گزاره‌ی  $\sim P$  نادرست است و اگر ارزش گزاره‌ی  $P$  نادرست باشد، ارزش گزاره‌ی  $\sim P$  درست خواهد بود.

مثال: نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف)  $\sqrt{3}$  عددی گنبد است.

ب) تساوی  $8 - 3 = 5$  برقرار است.

ج) ۴ عددی اول است.

د) عدد صفر زوج است.

ه) تهران پایتخت ایران نیست.

مثال: آیا نقیض عبارت «**× مثبت است**» را می‌توانیم به صورت «**× منفی است**» بنویسیم؟ چرا؟

جواب: خیر

زیرا نقیض «**× مثبت است**» به صورت «**× مثبت نیست**» می‌باشد به این معنی که مقدار  $\times$  یا منفی است یا صفر است.

ترکیب تزارها

الف) ترکیب عطفی دوگزاره؛ اگر بخواهیم دوگزاره مانند  $P$  و  $q$  را با لفظ « و » بهم ترکیب کنیم از نماد «  $\wedge$  » بین دوگزاره استفاده می‌کنیم و آنرا به صورت «  $P \wedge q$  » می‌نویسیم و به صورت «  $P$  و  $q$  » می‌خوانیم

$P$	$q$	$P \wedge q$
$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$
$\wedge$	$\cup$	$\cup$
$\cup$	$\wedge$	$\cup$
$\cup$	$\cup$	$\cup$

نکته ی مهم؛ ترکیب عطفی دوگزاره فقط هنگامی درست است که هر دوگزاره ارزشی درست داشته باشند، و اگر حداقل یکی از دوگزاره نادرست باشد، ارزش گزاره «  $P \wedge q$  » نادرست خواهد بود.

جدول شماره (۱)

مثال: ارزش گزاره ی زیر را معلوم کنید.

« عدد ۳ فرد است و پنج فرد است »

لکه دقت شود که حرف « و » ترکیب عطفی است.

$P$  به معنی؛ عدد ۳ فرد است

$q$  به معنی؛ پنج فرد است

جواب: حرف می‌کنیم که

در این صورت چون ارزش گزاره ی  $P$  نادرست و ارزش گزاره ی  $q$  درست است پس با توجه به ردیف سوم جدول بالا ارزش گزاره ی «  $P \wedge q$  » نادرست می‌باشد.

ب) ترکیب فصلی دوگزاره؛ اگر بخواهیم دوگزاره مانند  $P$  و  $q$  را با لفظ « یا » بهم ترکیب

کنیم از نماد «  $\vee$  » بین دوگزاره استفاده می‌کنیم و آنرا به صورت

«  $P \vee q$  » می‌نویسیم و به صورت «  $P$  یا  $q$  » می‌خوانیم

$P$	$q$	$P \vee q$
$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$
$\wedge$	$\cup$	$\wedge$
$\cup$	$\wedge$	$\wedge$
$\cup$	$\cup$	$\cup$

نکته ی مهم؛ ترکیب فصلی دوگزاره فقط هنگامی نادرست است که ارزش هر دوگزاره نادرست باشند، و اگر حداقل یکی از دوگزاره درست باشند، ارزش گزاره ی «  $P \vee q$  » درست خواهد بود.

مثال: ارزش گزاره ی زیر را معلوم کنید

« عدد ۳ زوج است یا  $\sqrt{3}$  گویاست »

جدول شماره (۲)

لکه دقت شود که حرف « یا » ترکیب فصلی است.

جواب: ارزش گزاره ی اولی درست و ارزش دومی نادرست است پس ارزش گزاره درست می‌باشد.

مثال: ارزش گزاره‌های زیر را معلوم کنید

- الف) پنج عددی فرد و ۴ عددی اول است
- ب) عدد  $\sqrt{2}$  گنگ یا ۴ عددی زوج است
- ج)  $\sqrt{16} = 8$  و صفر عددی اول است
- د)  $\sqrt{9}$  گنگ است یا  $\sqrt{10}$  گویا است

ج) ترکیب شرطی دو گزاره؛ اگرخواهیم از گزاره  $P$  گزاره  $Q$  را نتیجه بگیریم از نهاد « $\Rightarrow$ » استفاده می‌کنیم و آنرا به صورت « $P \Rightarrow Q$ » می‌نویسیم و با صورت « $P$  اگر آنگاه  $Q$ » یا به صورت « $P$  نتیجه می‌دهد  $Q$ » می‌خوانیم

P	Q	$P \Rightarrow Q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

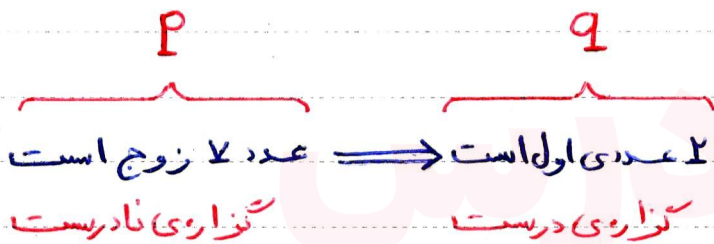
نکته: در گزاره شرطی « $P \Rightarrow Q$ »  $P$  را مقدم و  $Q$  را تالی می‌نامیم

نکته‌ی مهم؛ گزاره شرطی « $P \Rightarrow Q$ » فقط زمانی دارای ارزشی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد (یعنی از یک گزاره درست نتیجه‌ی نادرست حاصل شود)

جدول شذاری (۳)

مثال: ارزش گزاره شرطی زیر را مشخص کنید

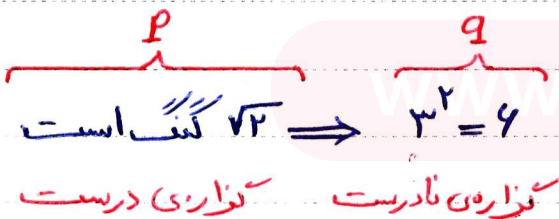
«اگر عدد ۴ زوج است آنگاه ۴ عددی اول است»



پس با توجه به ردیف سوم جدول بالا ارزش این گزاره درست می‌باشد.

مثال: ارزش گزاره شرطی زیر را مشخص کنید

«اگر  $\sqrt{2}$  گنگ است آنگاه  $3^2 = 4$ »



پس با توجه به ردیف دوم جدول بالا ارزش این گزاره نادرست می‌باشد.

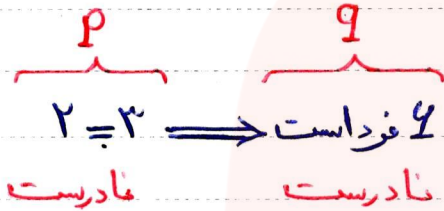
مثال: ارزش گزاره شرطی زیر را مشخص کنید

«اگر تهران پایتخت ایران است پس ۴ عددی اول است»

نکته ی مهم: با توجه به دوردیف آخر جدول شماره ۳ در ترازوی شرطی  $P \Rightarrow Q$  اگر ارزش گزاره  $P$  نادرست باشد، درستی یا نادرستی گزاره  $Q$  تأثیری در ارزش گزاره  $P \Rightarrow Q$  ندارد و همواره ارزشی  $P \Rightarrow Q$  درست خواهد بود. در این حالت می‌گوییم: گزاره ی شرطی  $P \Rightarrow Q$  به انتهای مقدم دارای ارزشی درست است.

مثال: گزاره های زیر را در نظر بگیرید.

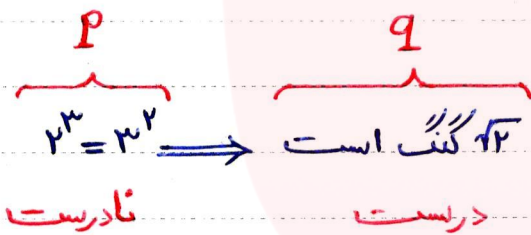
« اگر  $2=3$  باشد آنگاه  $4$  غور است »



ارزشی گزاره به انتهای مقدم درست است.

مثال: گزاره ی زیر را در نظر بگیرید.

« اگر  $3^3=3^2$  باشد آنگاه  $\sqrt{2}$  گنگ است »



ارزشی گزاره به انتهای مقدم درست است.

سؤال امتحانی: اگر  $P$  گزاره ای درست و  $Q$  گزاره ای نادرست و  $r$  گزاره ای دلخواه باشد، ارزش گزاره های مرکب زیر را مشخص کنید.

$(P \wedge Q) \Rightarrow r$

P	Q	$P \wedge Q$	r	$(P \wedge Q) \Rightarrow r$
>	ن	ن	>	>
>	ن	ن	ن	>

$(P \Rightarrow Q) \wedge r$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	r	$(P \Rightarrow Q) \wedge r$
>	ن	ن	>	ن
>	ن	ن	ن	ن

$(Q \Rightarrow P) \wedge r$

Q	P	$Q \Rightarrow P$	r	$(Q \Rightarrow P) \wedge r$
ن	>	>	>	>
ن	>	>	ن	ن

$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow r$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	r	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow r$
>	ن	ن	>	>
>	ن	ن	ن	>

بنابراین ارزش گزاره به  $r$  بستگی دارد.

ارزش گزاره درست می‌باشد و به ارزش  $r$  بستگی ندارد.

سؤال مهم: اگر  $P$  گزارای درست و  $Q$  گزارای نادرست و  $R$  گزارای دلخواه باشد، ارزش گزارای مقابل را مشخص کنید.

$$(P \wedge Q) \Rightarrow R$$

د) ترکیب دوشرطی: اگر بخواهیم از گزارای  $P$  گزارای  $Q$  را نتیجه بگیریم و از گزارای  $Q$  گزارای  $P$  را نتیجه بگیریم، از نماد « $\Leftrightarrow$ » استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم « $P \Leftrightarrow Q$ » و آنرا بصورت « $P$  اگر و تنها اگر  $Q$ » می‌خوانیم.

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \equiv P \Leftrightarrow Q$$

علامت هم‌ارز بودن یا معادل بودن

$P$	$Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
>	>	>	>	>
>	ن	ن	>	ن
ن	>	>	ن	ن
ن	ن	>	>	>

نکته‌ی مهم: با توجه به جدول مقابل واضح است که ارزش گزارای  $P \Leftrightarrow Q$  فقط هنگامی درست است که گزاره‌های  $P$  و  $Q$  هم‌ارزشی باشند یعنی اینکه هر دو درست و یا هر دو نادرست باشند ولی اگر ارزش گزاره‌ها با هم متفاوت

باشند (یکی درست و یکی نادرست باشد) ارزش گزارای  $P \Leftrightarrow Q$  نادرست خواهد بود.

مثال: ارزش گزاره‌های زیر را معلوم کنید.

«اگر ۲ فرد است، آنگاه ۱ عددی اول است و برعکس»

ارزش گزاره درست است.

$$\underbrace{P}_{\substack{\text{۲ فرد است} \\ \text{نادرست}}} \Leftrightarrow \underbrace{Q}_{\substack{\text{۱ عددی اول است} \\ \text{نادرست}}}$$

«۳۹ عددی اول است اگر و فقط اگر  $\sqrt{۲}$  گنگ باشد»

ارزش گزاره نادرست است.

$$\underbrace{P}_{\substack{\text{۳۹ عددی اول است} \\ \text{نادرست}}} \Leftrightarrow \underbrace{Q}_{\substack{\text{\sqrt{۲} گنگ است} \\ \text{درست}}}$$

سؤال امتحانی: با توجه به جدول ارزش گزارها، درستی هم ارزی زیر را بررسی کنید.

$$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
>	>	ن	ن	>	ن	ن
>	ن	ن	>	>	ن	ن
ن	>	>	ن	>	ن	ن
ن	ن	>	>	ن	>	>

واضح است که دو ستون سمت راست جدول دارای ارزشهای یکسانی هستند.

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
>	>	ن	ن	>	>
>	ن	ن	>	ن	ن
ن	>	>	ن	>	>
ن	ن	>	>	>	>

واضح است که دو ستون سمت راست جدول دارای ارزشهای یکسانی هستند.

نکته مهم: گزاره  $\sim q \Rightarrow \sim p$  را **عکس نقیض گزاره**  $p \Rightarrow q$  می گویند.

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

قوانین دمورگان

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

تکلیف: نشان دهید که؟

سؤال امتحانی: نشان دهید که اگر  $P$  و  $Q$  گزاره‌های دلخواه باشند آنگاه

$$(P \wedge \sim Q) \vee (P \Rightarrow Q) \equiv T$$



سؤال امتحانی: نشان دهید که اگر  $P$  و  $Q$  گزاره‌های دلخواه باشند آنگاه

$$(P \vee \sim Q) \wedge (P \vee Q) \equiv P$$



سؤال امتحانی: ثابت کنید که اگر  $n^2$  زوج باشد آنگاه  $n$  زوج است ( $n \in \mathbb{N}$ )  
 راهنمایی: از عکس نقیض استفاده کنید



سؤال امتحانی؛ ثابت کنید که مجموع دو عدد زوج عددی زوج است.

سؤال امتحانی؛ گزاره‌های زیر را به کمک نمادهای ریاضی بازنویس کنید

الف) دو برابر جذر عددی برابر خودش است

ب) مجموع مکعب‌های دو عدد بزرگتر یا مساوی مجموع آن دو عدد است

ج) مجموع مکعبات دو عدد بزرگتر مساوی است با مجموع آن دو عدد

د) مکعب یک عدد از هفت برابر آن عدد به علاوه پنج بزرگتر است

ت) جذر عددی با نصف خودش برابر است

سؤال امتحانی؛ درستی یا نادرستی استدلال زیر را مشخص کنید

« اگر طول و عرض یک مستطیل را دو برابر کنیم مساحت آن دو برابر می‌شود.»

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

سؤال امتحانی: ستون نتیجه‌ی گزارشی  $[q \Rightarrow (p \wedge q)]$  را بنویسید.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$q \Rightarrow (p \wedge q)$	$p \vee q \Rightarrow [q \Rightarrow (p \wedge q)]$

سؤال امتحانی: اگر ارزش گزارشی ۲ درست و ارزش گزارشی  $(q \vee r) \Leftrightarrow q \Rightarrow p$  نادرست باشد گزارشی  $r \Rightarrow q \wedge p$  هم ارزش با کدام است؟

الف) T

ب) F

ج)  $r \Rightarrow p$ 

د) نامشخص

تعریف گزاره‌ها: هر جمله‌ی خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جایگذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل می‌شود را **گزاره‌ها** می‌گویند.

نکته: گزاره‌ها را بر حسب تعداد متغیر به این‌گونه تقسیم می‌کنند: گزاره‌های یک متغیره، دو متغیره یا... می‌نامیم.

مثال: « $x$  عددی زوج است» یک گزاره‌های یک متغیره می‌باشد که:

الف) اگر به جای  $x$  عدد ۴ قرار بگیرد، ارزش جمله‌ی خبری درست است.

ب) اگر به جای  $x$  عدد ۳ قرار بگیرد، ارزش جمله‌ی خبری نادرست است.

مثال: « $2x + y = 7$ » یک گزاره‌های دو متغیره می‌باشد که در آن:

الف) اگر  $x=1$ ،  $y=5$  باشد، آنگاه  $2(1) + 5 = 7$  می‌باشد که یک گزاره‌ی درست می‌باشد.

ب) اگر  $x=3$ ،  $y=4$  باشد، آنگاه  $2(3) + 4 = 10$  می‌باشد که یک گزاره‌ی نادرست می‌باشد.