درس اوّل

مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

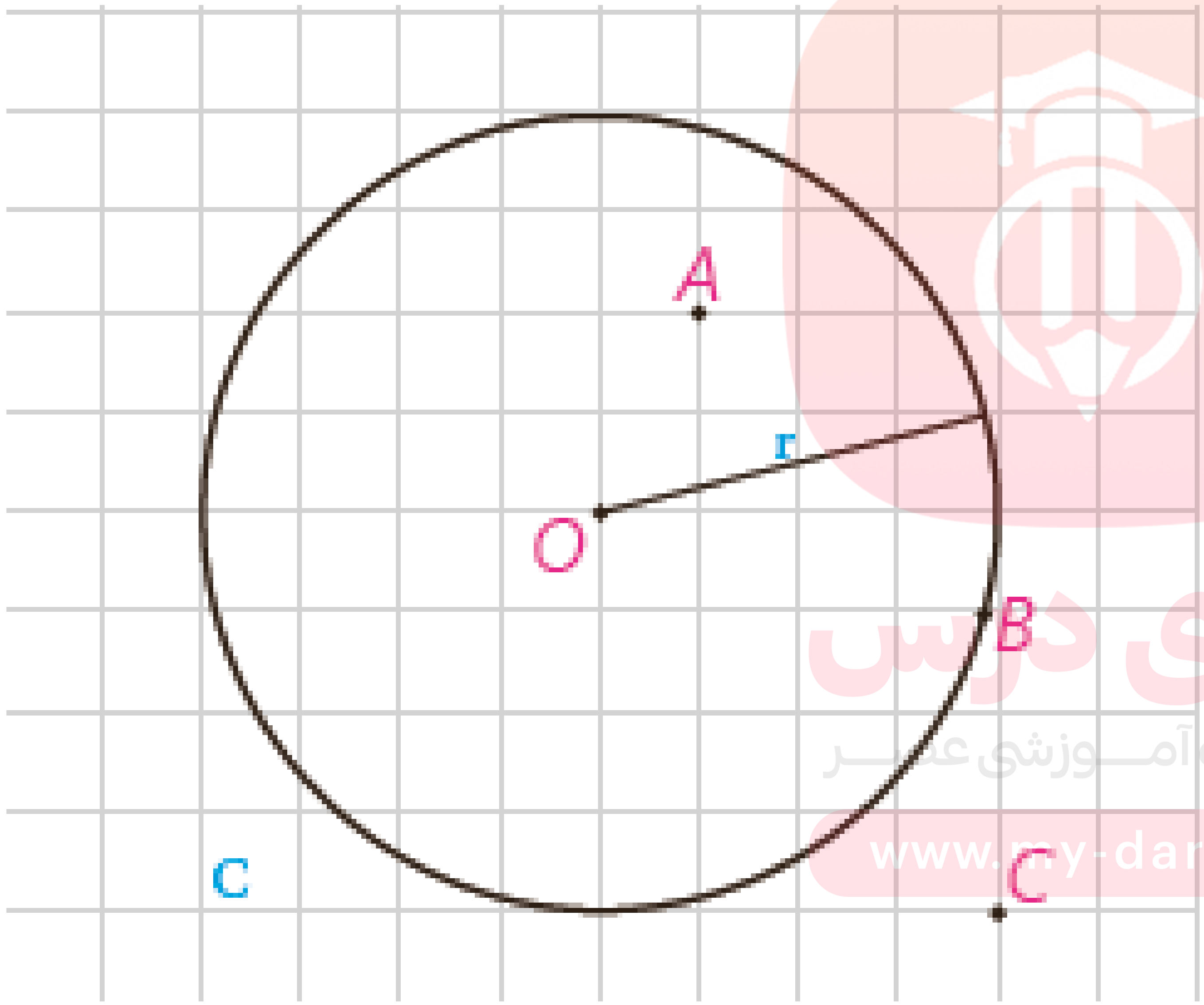
تمام نقاطی که روی دایره واقع‌اند از مرکز دایره به یک فاصلهٔ ثابت (اندازهٔ شعاع دایره) هستند.

معمولاً دایرهٔ C به مرکز O و شعاع r را به‌صورت C(O,r) نمایش می‌دهیم.

الف) اگر نقطه‌ای مانند B روی دایره C(O,r) باشد، فاصله آن تا مرکز دایره ..**برابر**.. شعاع دایره است.

ب) اگر نقطه‌ای مانند C بیرون دایره C(O,r) باشد، فاصله آن تا مرکز دایره ..**بزرگتر از**.. شعاع دایره است.

پ) اگر نقطه‌ای مانند A درون دایره C(O,r) باشد، فاصله آن تا مرکز دایره ..**کوچکتر از**.. شعاع دایره است.



$OA < r$

A درون دایره است

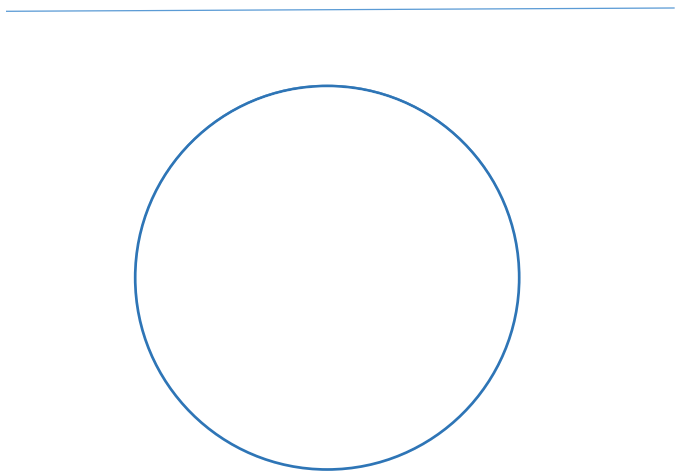
$OB = r$

B روی دایره است

$OC > r$

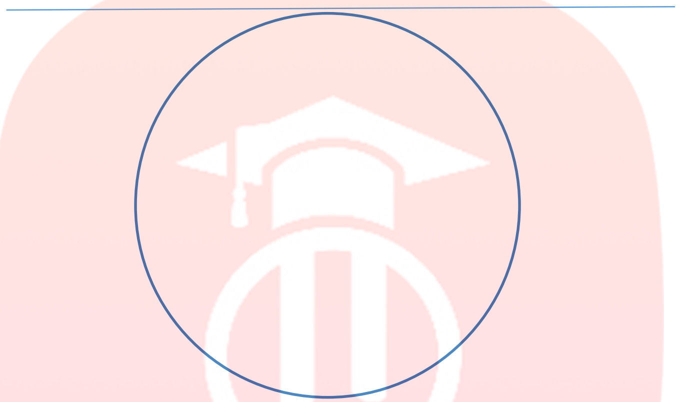
C بیرون دایره است

اوضاع نسبی خط و دایره



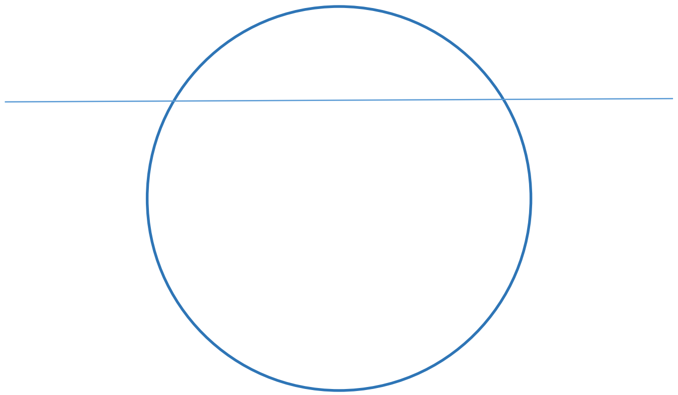
هیچ نقطه مشترک

(خط و دایره بیرون هم هستند)



یک نقطه مشترک

(خط بر دایره مماس است)



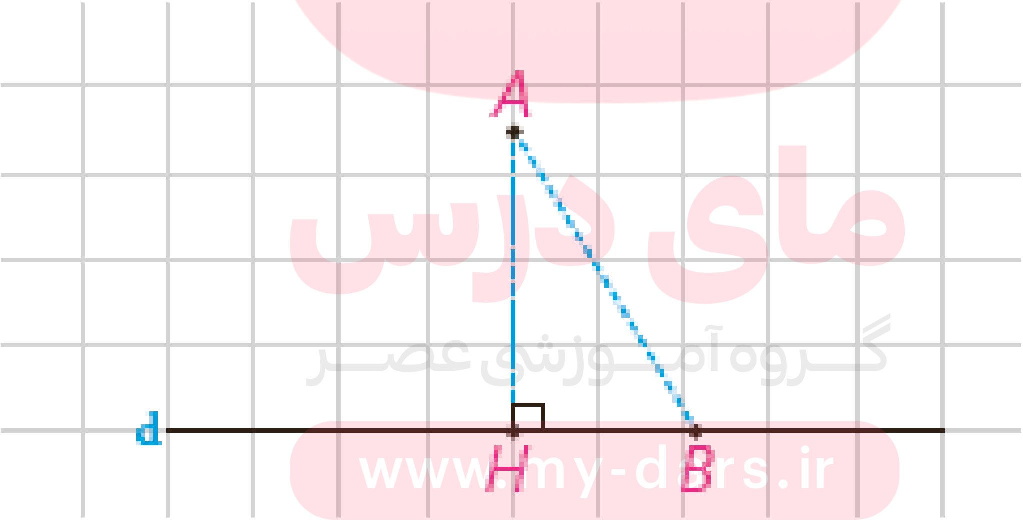
دو نقطه مشترک

(خط و دایره متقاطع هستند)

(خط قاطع دایره است)

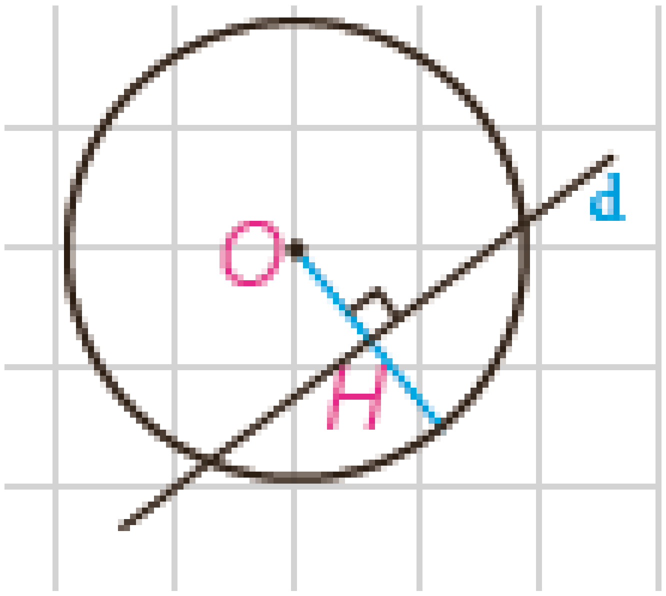
یادآوری

اگر خط d و نقطهٔ A غیرواقع بر d داده شده، و نقطهٔ H پای عمودی باشد که از A به d رسم می‌شود، اندازهٔ پاره‌خط AH همان فاصله نقطه A از خط d است و فاصلهٔ نقطهٔ A از دیگر نقاط خط d از این مقدار بزرگ‌تر است ($AB > AH$).

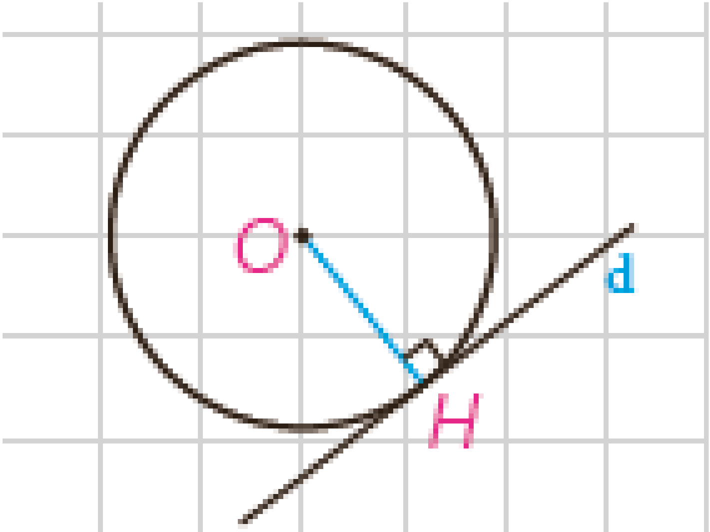


اگر d یک خط و C(O,r) یک دایره و نقطهٔ H پای عمودی باشد که از نقطهٔ O به خط d رسم می‌شود، موارد زیر را کامل کنید.

الف) اگر فاصلهٔ خط d از مرکز دایره از شعاع کمتر باشد ($OH < r$)، خط و دایره ......۲...... نقطهٔ اشتراک دارند؛ یعنی متقاطع‌اند.

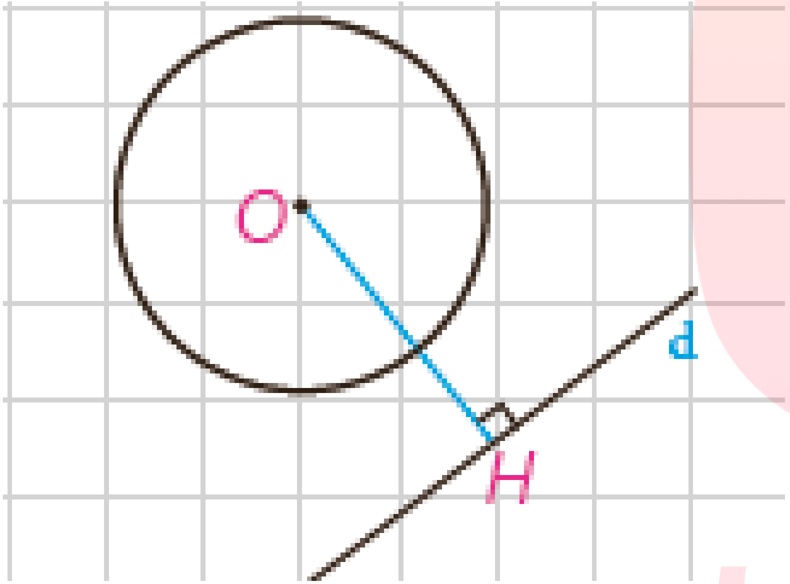


ب) اگر فاصلهٔ خط از مرکز دایره با شعاع برابر باشد $(OH = r)$، خط و دایره ....۱..... نقطهٔ اشتراک دارند؛ یعنی ..مماسند..



پ) اگر فاصلهٔ خط از مرکز دایره از شعاع بزرگ‌تر باشد $(OH > r)$، خط و دایره

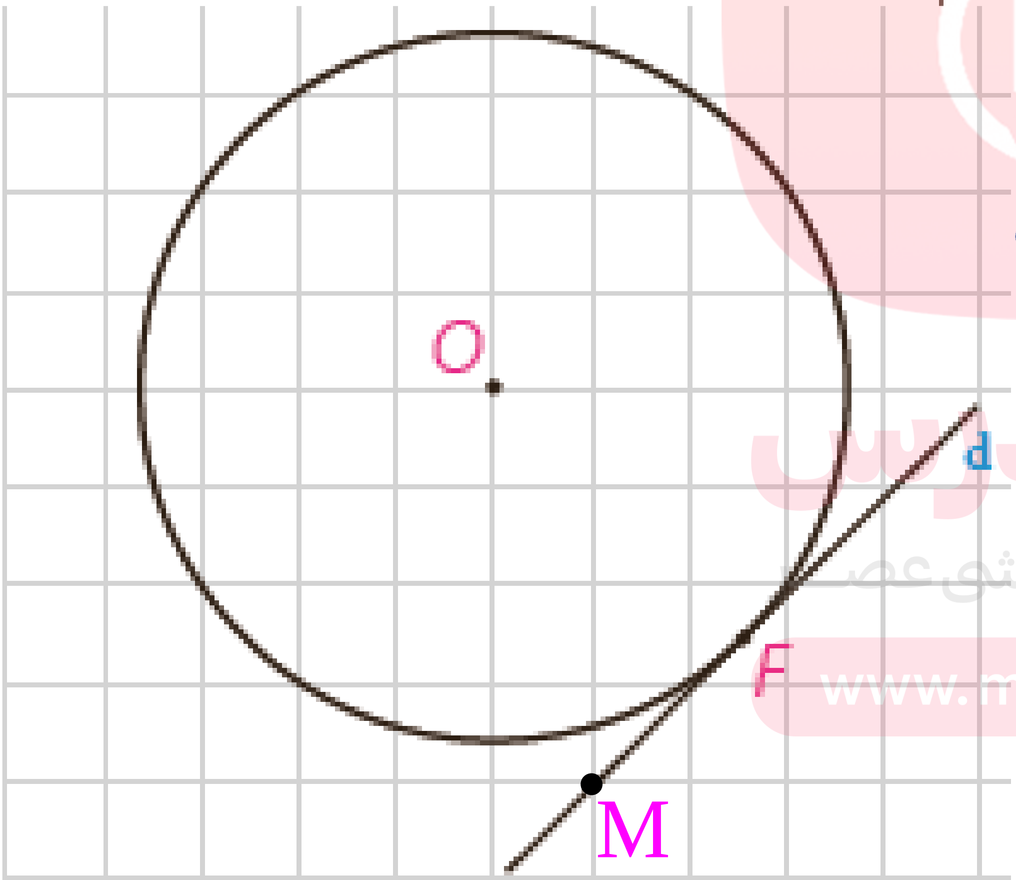
بیرون هم هستند



فعالیت

۱ــ فرض کنیم خط d بر دایرهٔ C در نقطهٔ F مماس است.

الف) نزدیک‌ترین نقطهٔ خط d به نقطهٔ O کدام است؟ چرا؟



F زیرا

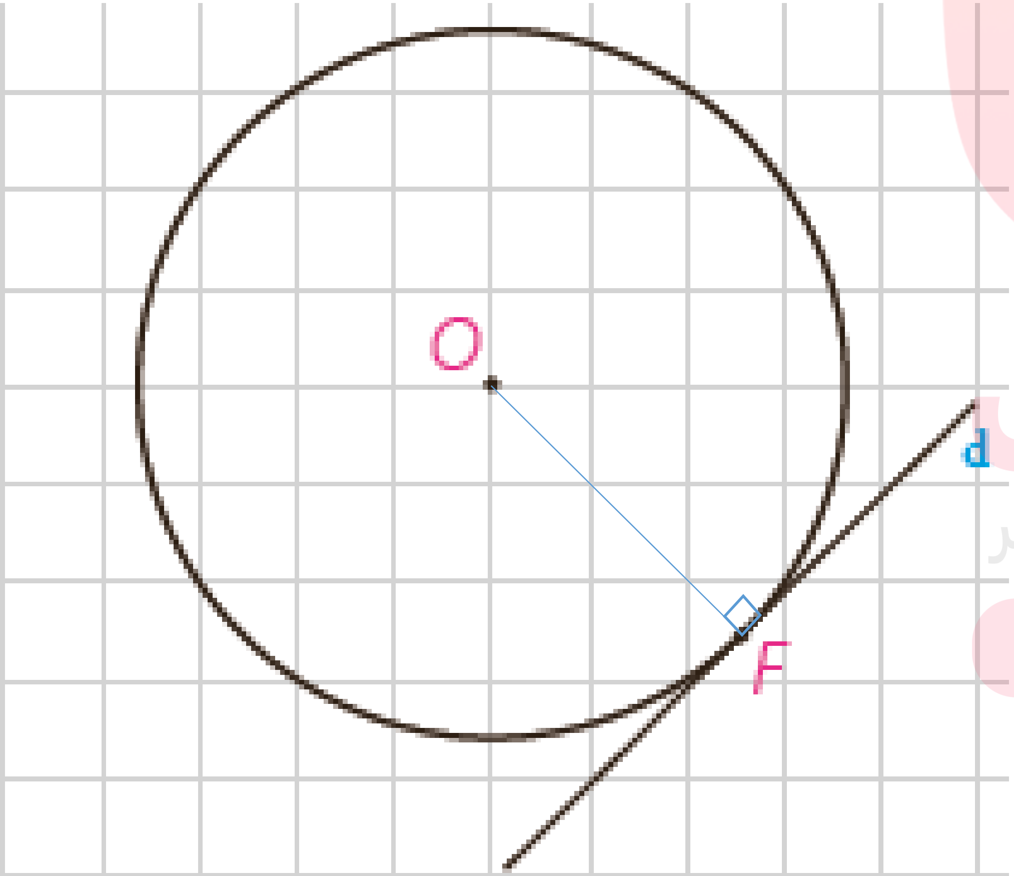
اگر M نقطه ای بجز F روی خط d باشد

$$\left.\begin{array}{l} OF = r \\ OM > r \end{array}\right\} \Rightarrow OF < OM$$

یعنی F نزدیکترین نقطه خط d به نقطه O است

ب) از O به d عمود کنید. این خط عمود، خط d را در کدام نقطه قطع می‌کند؟ چرا؟

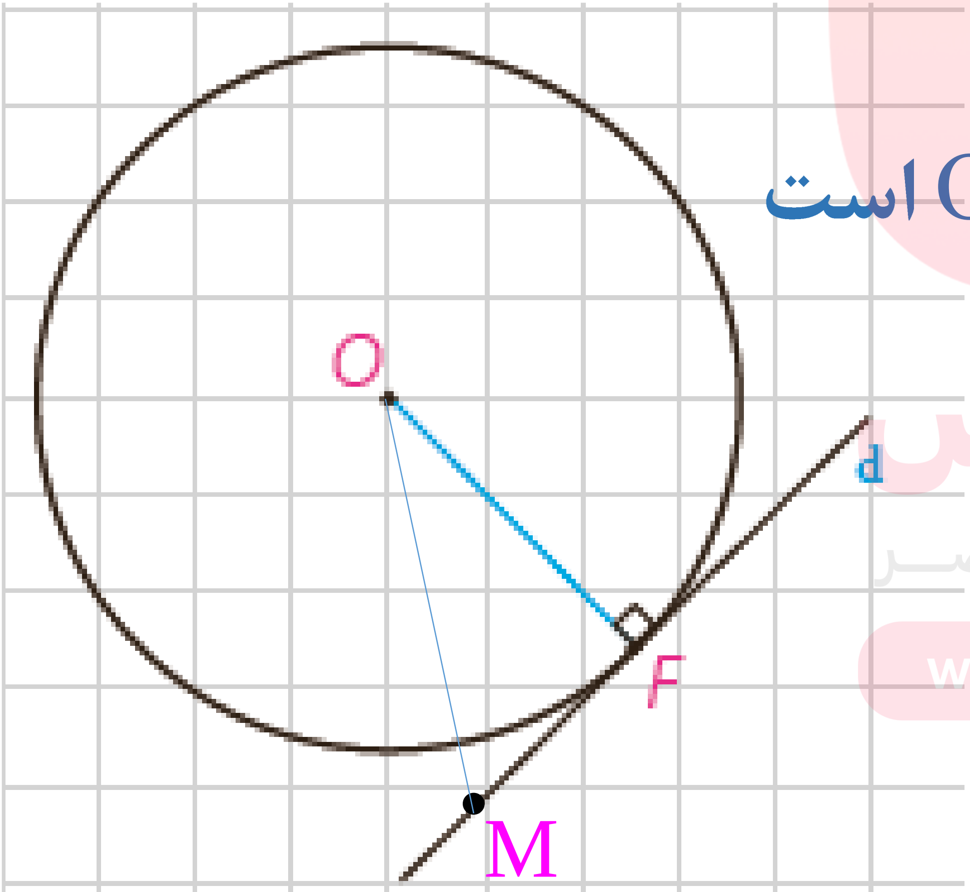
چون کوتاهترین فاصله نقطه O تا خط d فاصله عمودی است و طبق قسمت الف OF کوتاهترین فاصله O تا نقاط خط d است



پ) نتیجه : اگر F نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع OF و خط مماس بر دایره در نقطهٔ F . بر هم عمودند

۲ــ خط d در نقطهٔ F به شعاع OF عمود است. با تعیین وضعیت همهٔ نقاط خط d نسبت به دایرهٔ C نشان دهید این خط با دایره فقط یک نقطهٔ تماس دارد و بنابراین بر دایره مماس است.

اگر M نقطه ای بجز F روی خط d باشد



$$\left.\begin{array}{l} OF = r \\ OM \text{ وتر مثلث } OFM \text{ است} \end{array}\right\} \Rightarrow OM > r$$

یعنی M خارج دایره است

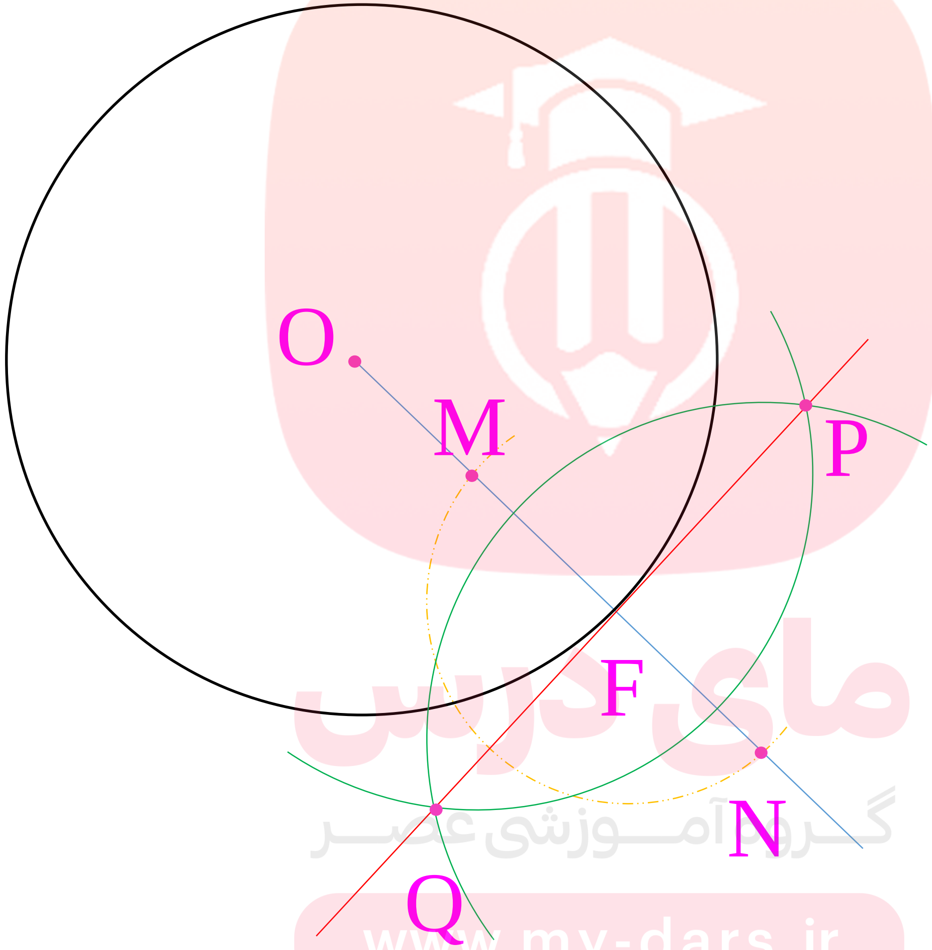
پس F تنها نقطه مشترک خط و دایره است

در نتیجه خط d بر دایره مماس است

۳ــ با توجه به قسمت‌های ۱ و ۲ اگر نقطه‌ای مانند F روی دایره داده شده باشد، چگونه می‌توانید خطِ مماس بر دایره را در نقطهٔ F رسم کنید؟

شعاع OF را رسم می کنیم

به روشی که در کتاب دهم آموخیم از F عمودی بر شعاع OF رسم می نماییم


O
M
P
F
N
Q

بنابراین :

یک خط و یک دایره بر هم مماس اند اگر و تنها اگر این خط در نقطهٔ تماس با دایره بر شعاع آن نقطه عمود باشد.

زوایای مرکزی، محاطی و ظلی

با تعاریف زوایای مرکزی و محاطی و کمان یک دایره در پایه‌های قبل آشنا شده‌اید. در اینجا به یادآوری برخی مفاهیم می‌پردازیم.

۱ــ **شعاع دایره**: پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد.

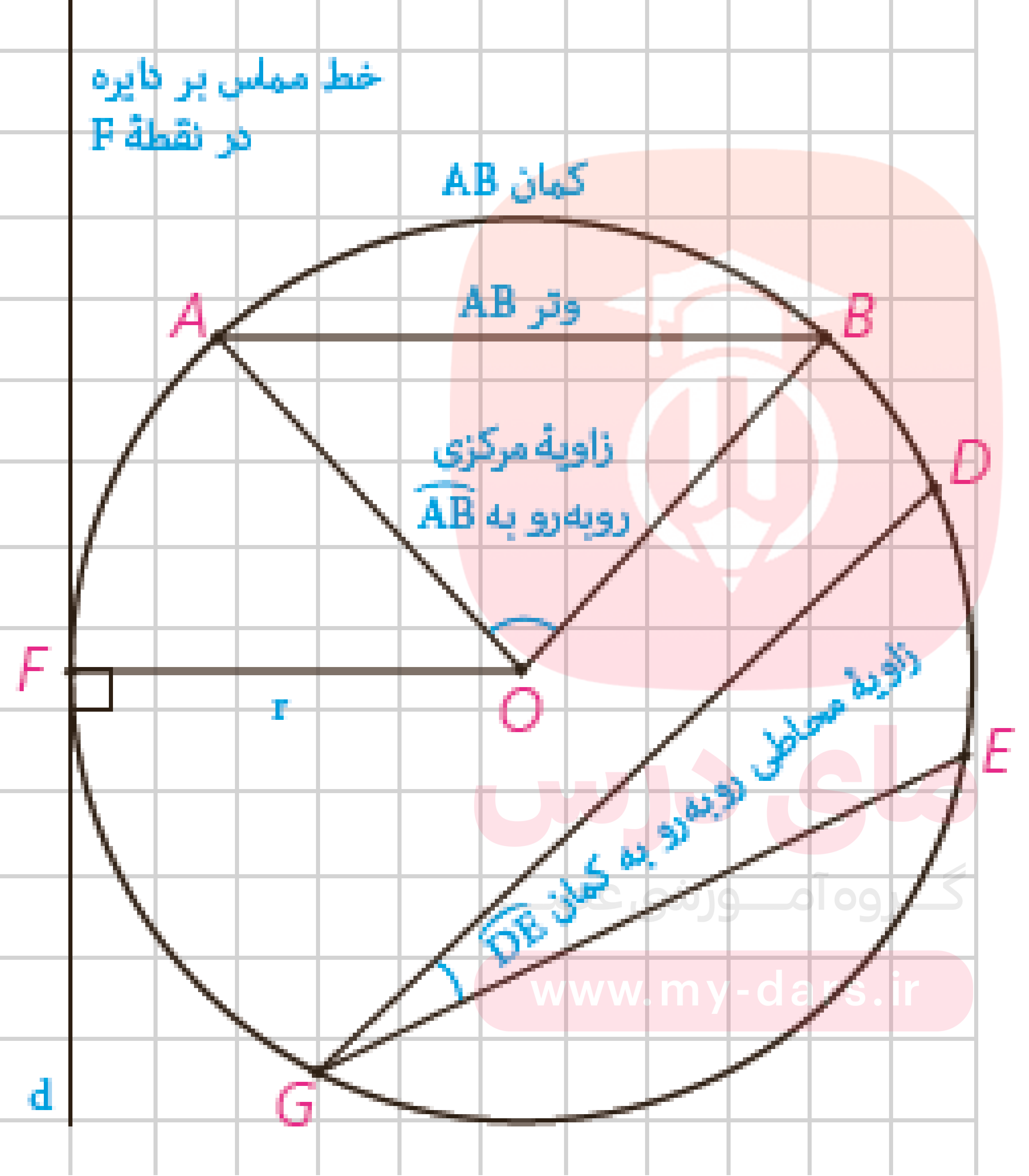
۲ــ **وتر دایره**: پاره‌خطی که دوسر آن روی دایره باشد.

۳ــ قطر دایره : وتری از دایره که از مرکز دایره می‌گذرد.

۴ــ زاویهٔ مرکزی : زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع باشد.

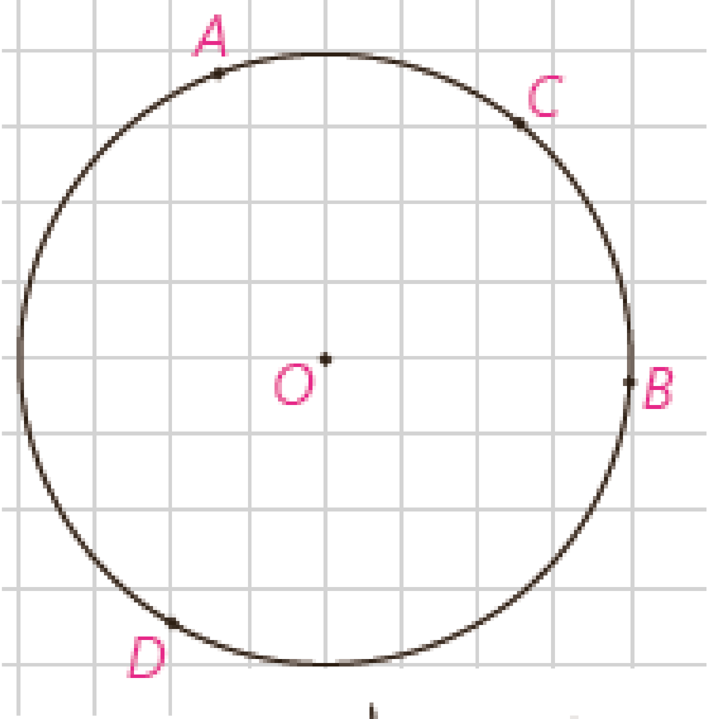
۵ــ زاویهٔ محاطی : زاویه‌ای است که رآس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از دایره باشند.

۶ــ کمان : کمان دایره شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است؛



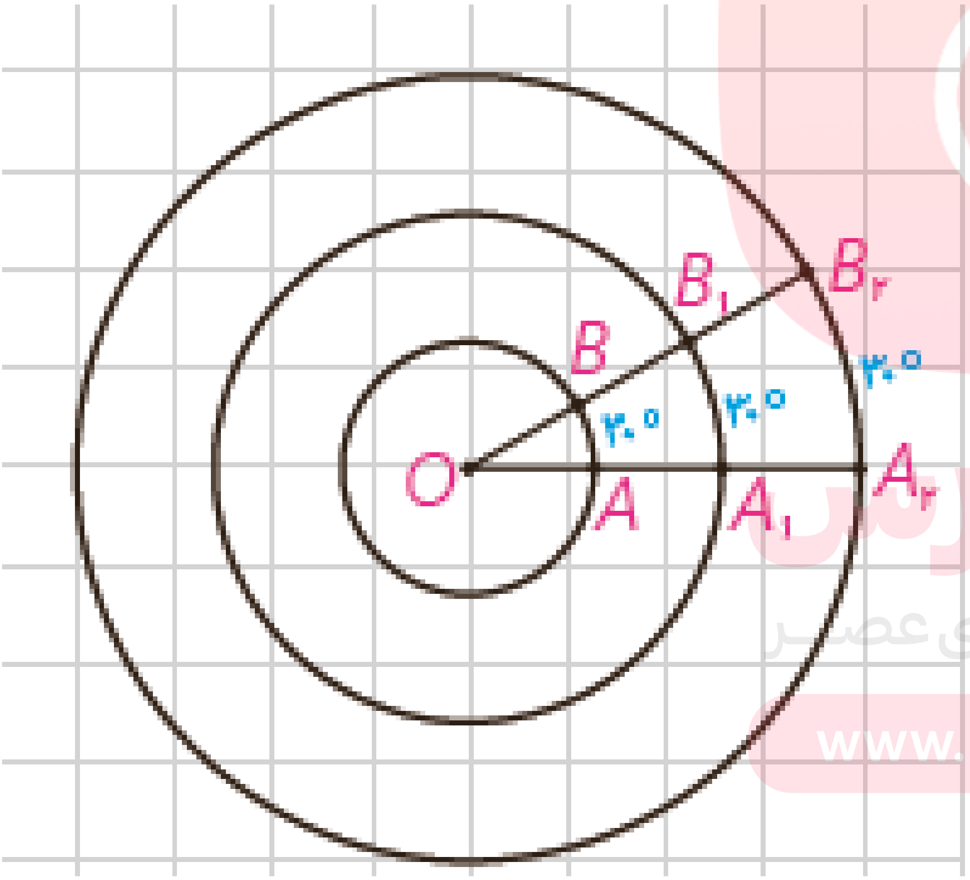
خط مماس بر دایره
در نقطهٔ F
کمان AB
وتر AB
A
B
D
زاویهٔ مرکزی
روبه‌رو به $\overset{\frown}{AB}$
F
O
r
E
زاویهٔ محاطی روبه‌رو به کمان $\overset{\frown}{DE}$
G
d

به این ترتیب هر دو نقطه از دایره مانند A و B، دو کمان $\overset{\frown}{AB}$ را روی دایره مشخص می‌کنند. برای مشخص کردن آنها می‌توان از نقطه‌ای دیگر روی هر کمان استفاده کرد؛ مثلاً در شکل مقابل نقاط A و B دو کمان $\overset{\frown}{ACB}$ و $\overset{\frown}{ADB}$ را مشخص می‌کنند. معمولاً منظور از $\overset{\frown}{AB}$ کمان کوچک‌ترِ مشخص شده توسط A و B است.



۷ــ اندازهٔ کمان، همان اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به آن کمان تعریف می‌شود و واحد آن درجه است.

۸ــ با توجه به شکل به سادگی دیده می‌شود که کمان‌های دایره‌های مختلف می‌توانند اندازه‌های برابر و طول‌های نابرابر داشته باشند.



کاردرکلاس

۱ــ با توجه به اینکه محیط دایره یک کمان به اندازه °۳۶۰ است، خواهیم داشت :

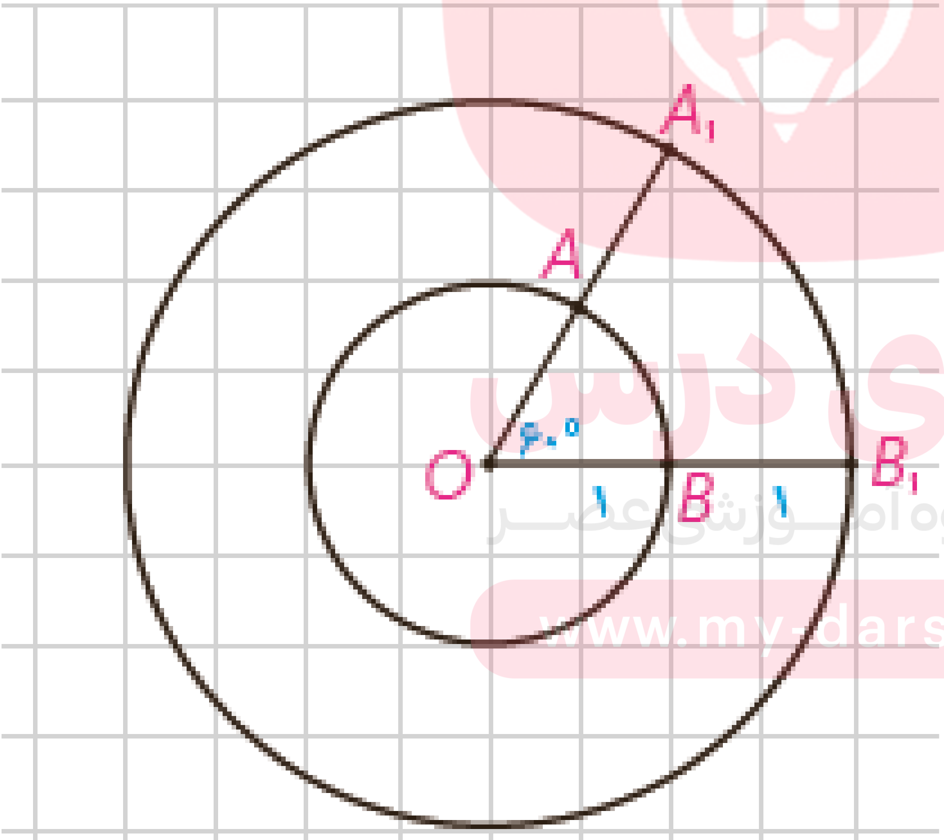
$$\frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان AB}}{۳۶۰}$$

محیط دایره × سهم زاویه = طول کمان

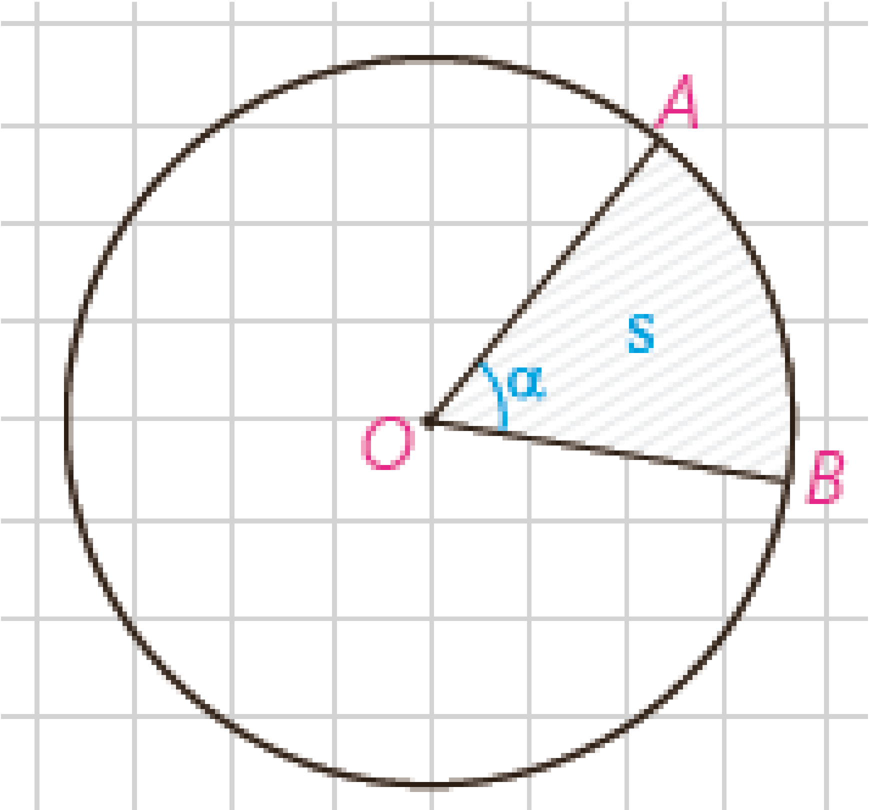
۲ــ با توجه به شکل، اندازه کمان‌های زیر را بنویسید.

$\overset{\frown}{AB} = ۶۰^{\circ}$ طول $\overset{\frown}{AB} = \frac{۱}{۶} \times (۲\pi \times ۱) = \frac{\pi}{۳}$

$\overset{\frown}{A_۱B_۱} = ۶۰^{\circ}$ طول $\overset{\frown}{A_۱B_۱} = \frac{۲\pi}{۳}$



۳ـ ناحیه‌ای از درون و روی دایره را، که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است یک قطاع دایره می‌نامند. اگر زاویهٔ مرکزی قطاعی از دایرهٔ $C(O,R)$ برحسب درجه مساوی α باشد، نشان دهید طول کمان AB برابر است با: $L=\frac{\pi R}{۱۸۰}\alpha$ و مساحت قطاع برابر است با: $S=\frac{\pi R^{۲}\alpha}{۳۶۰}$

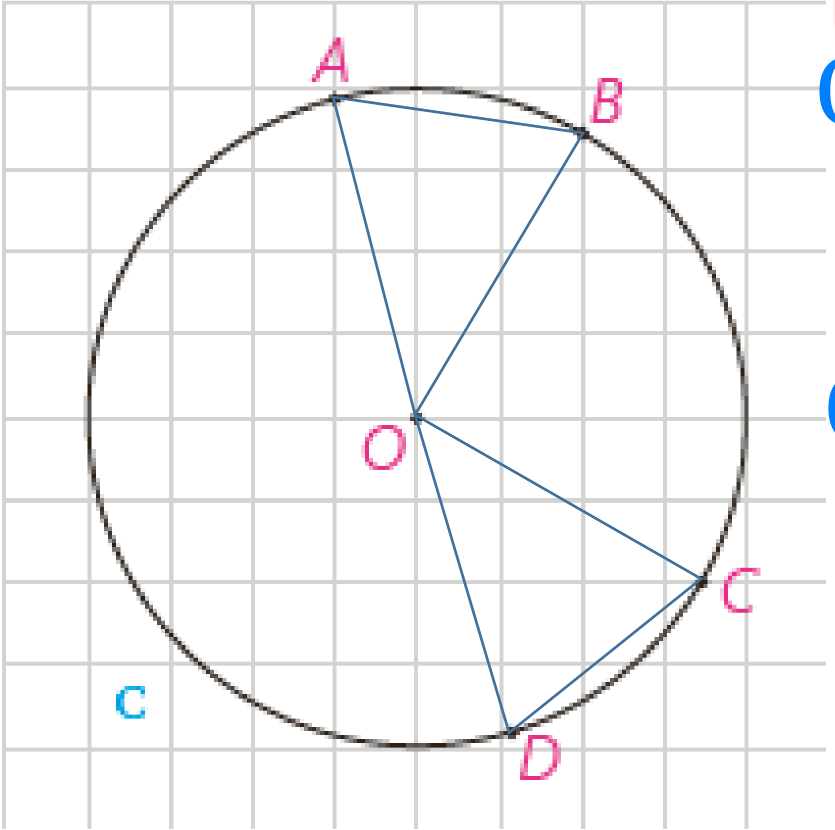


$$L=\frac{\alpha}{۳۶۰}\times ۲\pi R \Rightarrow L=\frac{\pi R}{۱۸۰}\alpha$$

$$S=\frac{\alpha}{۳۶۰}\times \pi R^{۲} \Rightarrow S=\frac{\pi R^{۲}\alpha}{۳۶۰}$$

فعالیت

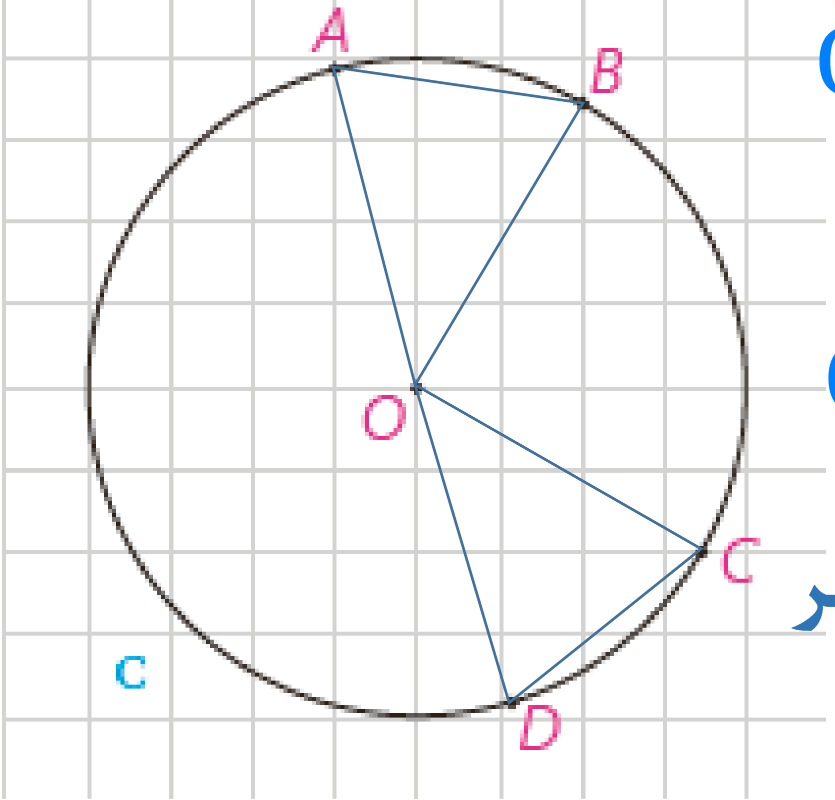
۱ــ فرض کنید اندازه‌های کمان‌های AB و CD از دایرهٔ C(O,r) باهم برابرند. با تشکیل مثلث‌های AOB و COD نشان دهید وترهای AB و CD نیز باهم برابرند.



$$\left.\begin{array}{l} OA = OD = r \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OB = OC = r \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OCD}$$

$$\Rightarrow AB = CD$$

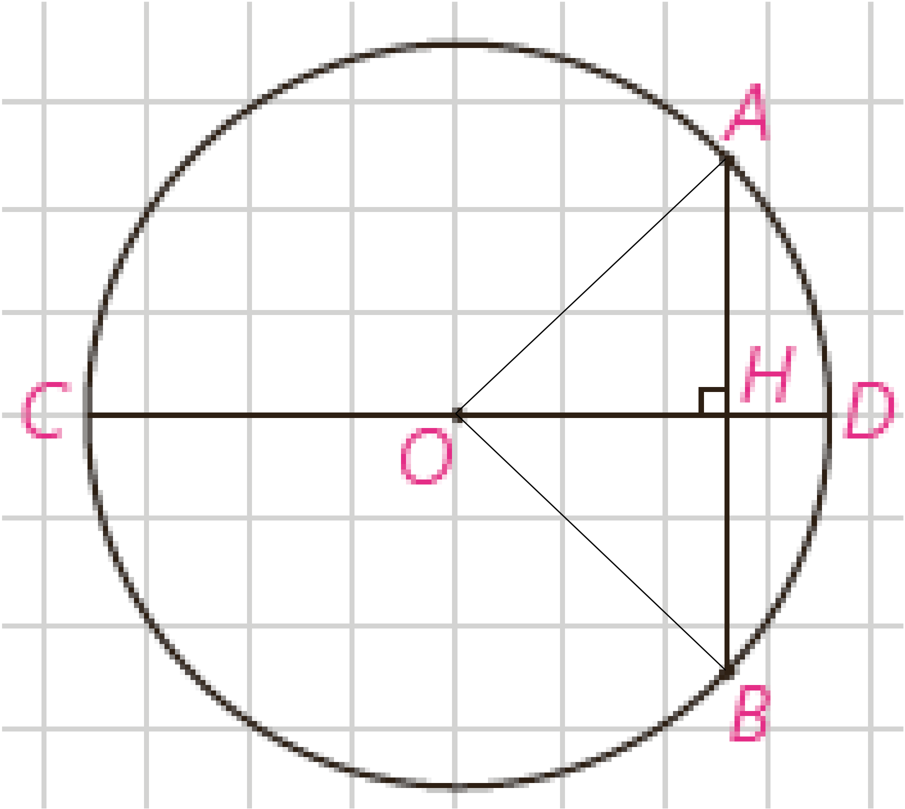
۲ــ فرض کنید دو وتر AB و CD از یک دایره باهم برابرند. ثابت کنید اندازه‌های کمان‌های AB و CD نیز باهم برابرند.



$$\left.\begin{array}{l} OA = OD = r \\ AB = CD \\ OB = OC = r \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(ض ض ض)}} \overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OCD}$$

تساوی اجزاءمتناظر $\Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

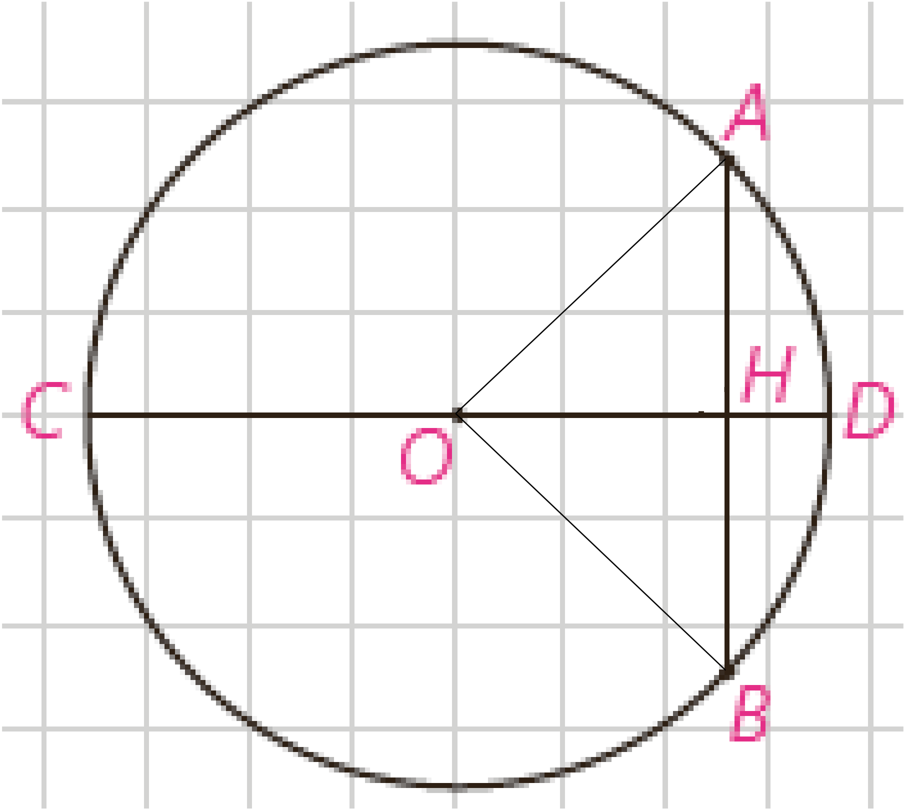
۳ــ وتر AB و قطری از دایره، که بر وتر AB عمود است، مانند شکل مقابل داده شده‌است. با تشکیل مثلث‌های AOH و BOH ثابت کنید قطر CD وتر AB و کمان AB را نصف می‌کند.



$$\left.\begin{array}{l} OA = OB = r \\ \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ \\ OH = OH \end{array}\right\} \xRightarrow{(وض)} \overset{\triangle}{OAH} \cong \overset{\triangle}{OBH}$$

تساوی اجزاءمتناظر $\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} AH = BH \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \Rightarrow AD = BD \end{array}\right.$

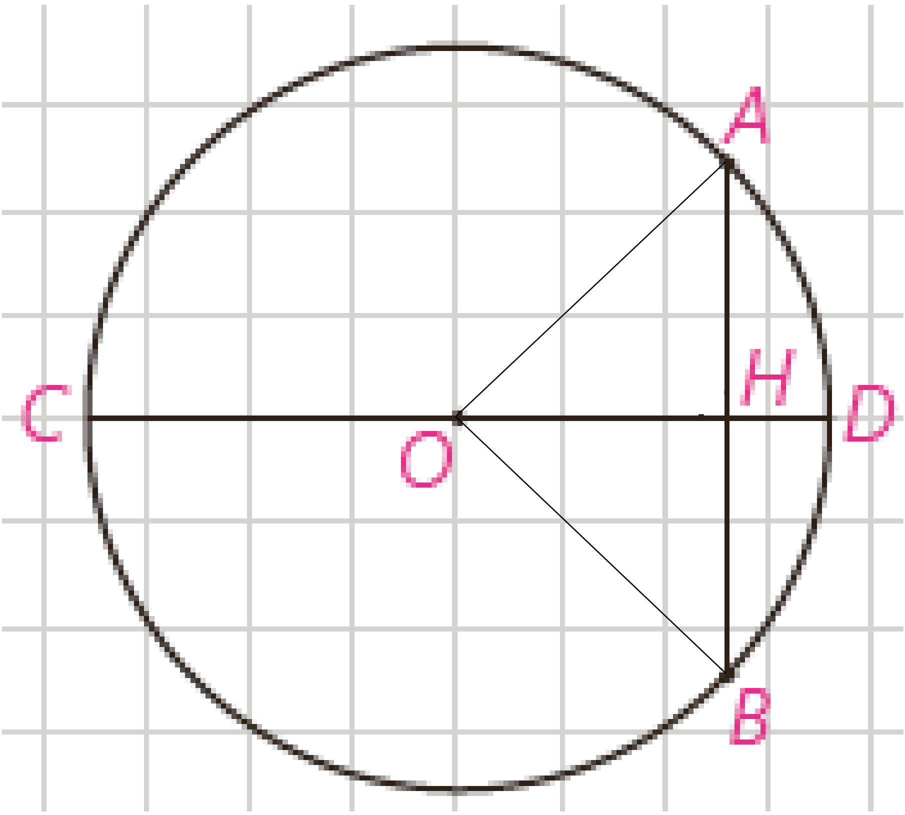
۴ــ این بار فرض کنید قطر CD وتر AB را نصف کرده است و نشان دهید CD بر AB عمود است و کمان AB را نصف می کند.



$$\left.\begin{array}{l} OA = OB = r \\ AH = BH \\ OH = OH \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\triangle}{OAH} \cong \overset{\triangle}{OBH}$$

تساوی اجزاءمتناظر $\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \Rightarrow AD = BD \end{array}\right.$

۵ـ حال فرض کنید قطر CD کمان AB را نصف کرده است. نشان دهید CD بر AB عمود است و آن را نصف می کند.



$$\left.\begin{array}{c} OA = OB = r \\ \hat{O}_{۱} = \hat{O}_{۲} \\ OH = OH \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(ض زض)}} \overset{\triangle}{OAH} \cong \overset{\triangle}{OBH}$$

$$\xRightarrow{\text{تساوی اجزاءمتناظر}} \left\{\begin{array}{l} \hat{H}_{۱} = \hat{H}_{۲} = ۹۰^\circ \\ AH = BH \end{array}\right.$$

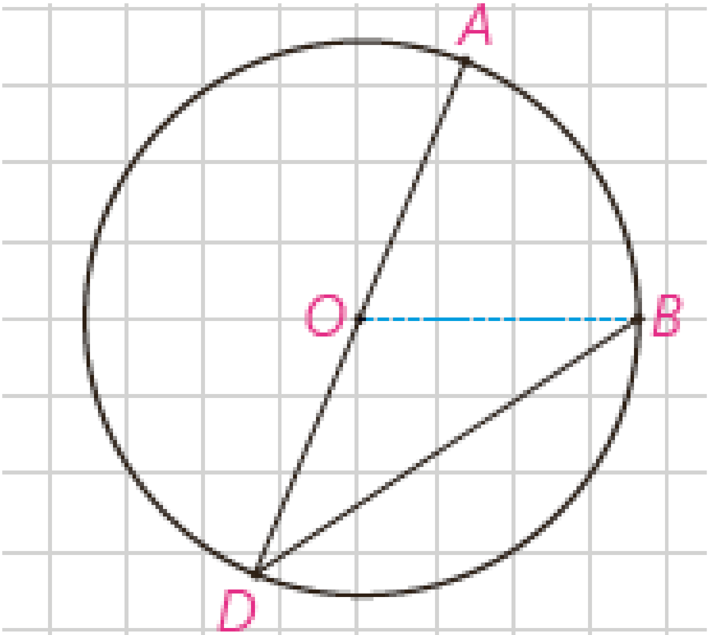
۶ـ اگر نقاط وسط وتر AB و کمان AB را داشته باشیم، چگونه می‌توانیم قطر عمود بر وتر AB را رسم کنیم؟

کافی است نقاط وسط وتر وکمان را به هم وصل کنیم و امتداد دهیم

امتداد این پاره خط از مرکز دایره می گذرد و چنانچه امتداد دهیم تا به محیط دایره برسد یک قطر از دایره خواهد بود که وتر AB را نصف می کند پس بر آن عمود است

فعالیت

۱ــ در شکل مقابل $\widehat{ADB}$ یک زاویهٔ محاطی است که یک ضلع آن از مرکز دایره عبور کرده است.



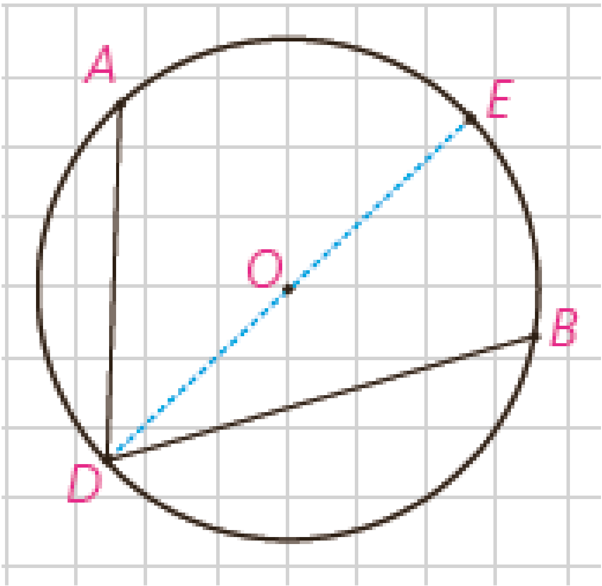
ــ اگر از B به O وصل کنیم، زاویهٔ AOB یک زاویهٔ خارجی برای مثلث OBD است.

بنابراین: $\widehat{AOB} = \widehat{ODB} + \cdots \hat{B} = ۲\widehat{ODB}$

و از آن نتیجه می‌شود:

$\widehat{ODB} = \frac{۱}{۲}\widehat{AOB} = \frac{۱}{۲}\ \widehat{AB}$

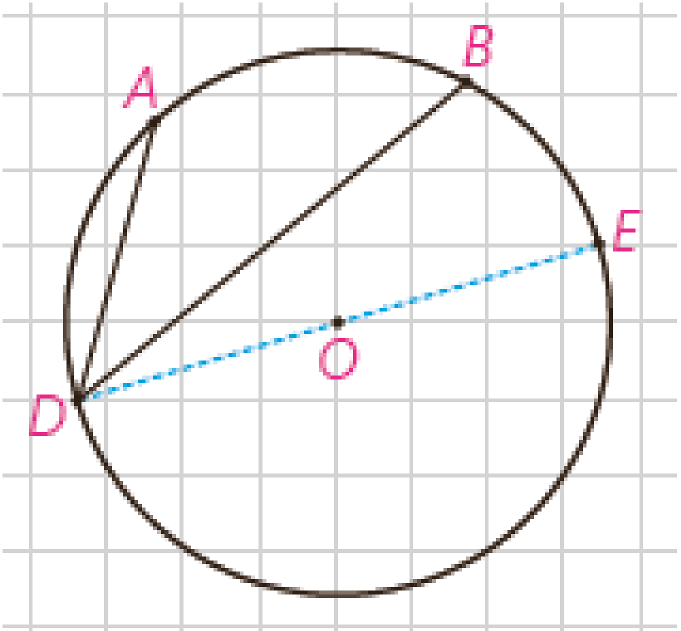
۲ــ در این شکل $\widehat{ADB}$ یک زاویهٔ محاطی است که دو ضلع آن در دو طرف O واقع شده‌اند.



ـ اگر قطر DE را رسم کنیم، طبق قسمت ۱ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ADE}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AE}\\[2em] \widehat{EDB}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{EB}\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{ADB}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$$

۳ــ در این شکل $\overset{\frown}{ADB}$ یک زاویهٔ محاطی است که دو ضلع آن در یک طرف O واقع شده‌اند.



ــ اگر قطر DE را رسم کنیم، طبق قسمت ۱ داریم:

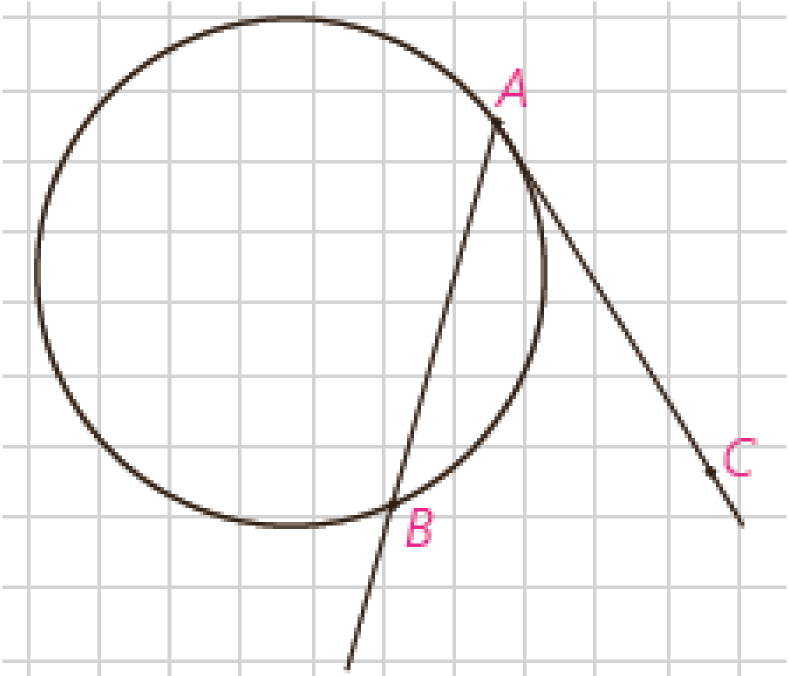
$$\left.\begin{aligned} \overset{\frown}{ADE} &= \frac{1}{2}\overset{\frown}{AE} \\ \overset{\frown}{EDB} &= \frac{1}{2}\overset{\frown}{BE} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{ADB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$$

بنابراین :

قضیه: اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر است با نصف اندازهٔ کمان مقابل به آن زاویه.

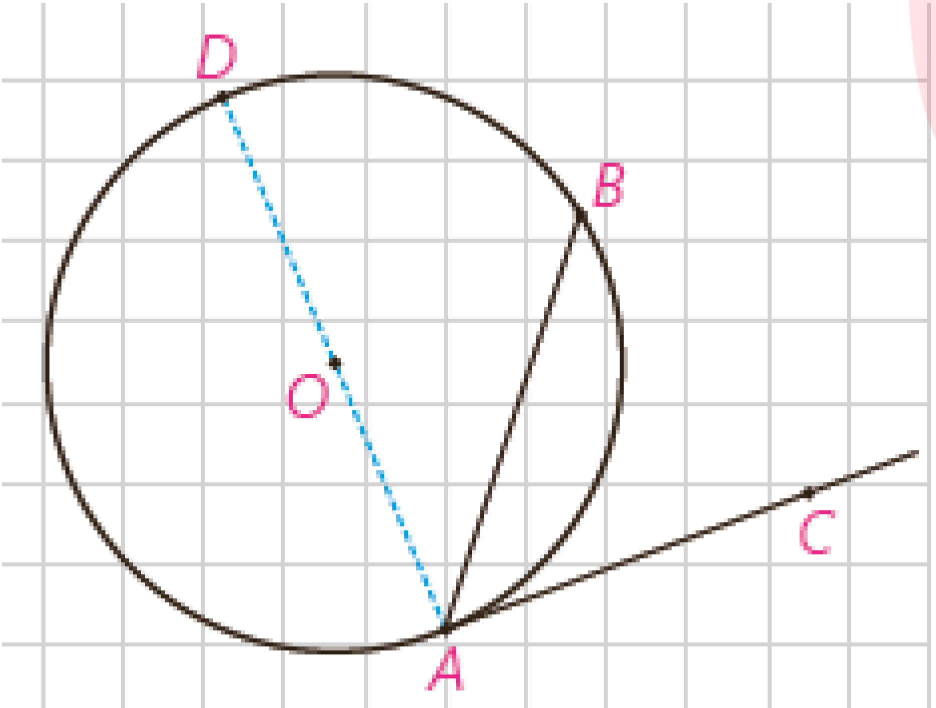
زاویهٔ ظلی

نوع دیگری از زاویه، که در دایره مطرح است، زاویهٔ ظلی است. زاویهٔ ظلی زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن مماس بر دایره وضلع دیگر آن شامل وتری از دایره باشد. در شکل مقابل $B\hat{A}C$ یک زاویهٔ ظلی است.



فعالیت

۱ــ زاویهٔ ظلی $\widehat{CAB}$ را درنظر بگیرید و قطری از دایره را رسم کنید که شامل نقطهٔ A هست.



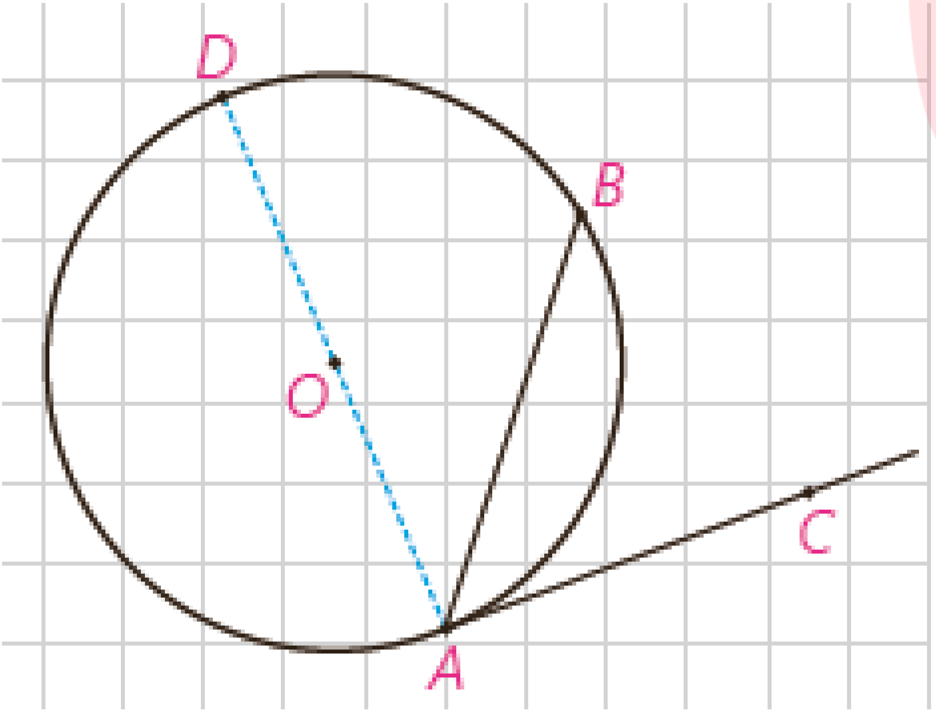
الف) $\widehat{DAC} = ..۹۰..^\circ$ و بنابراین : $\widehat{DAC} = \frac{۱}{۲}\ \overset{\frown}{AD}$

ب) زاویهٔ DAB یک زاویهٔ محاطی است.

بنابراین : $\widehat{DAB} = \frac{۱}{۲}\ \overset{\frown}{BD}$

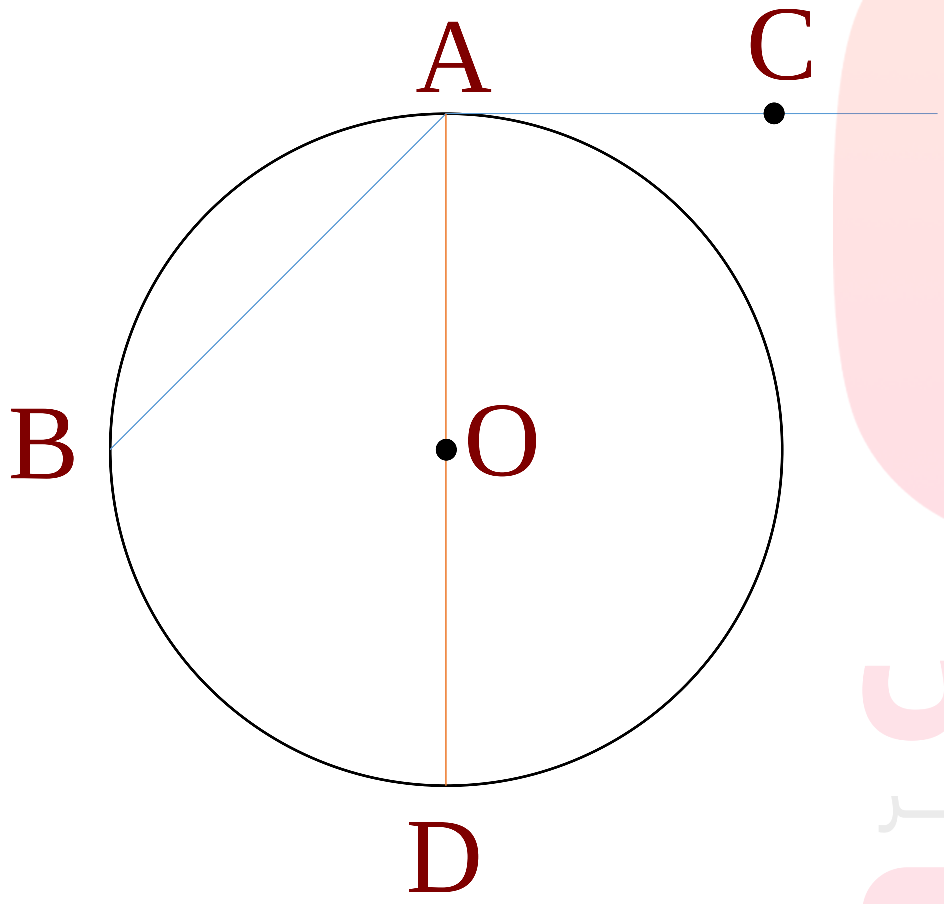
پ) از (الف) و (ب) داریم :

$$\overset{\frown}{DAC} - \overset{\frown}{DAB} = \frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BD})$$



$$\overset{\frown}{BAC} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}$$

ت) نشان دهید نتیجه قسمت (پ) برای یک زاویه ظلی منفرجه نیز برقرار است.



$$B\hat{A}C = B\hat{A}D + D\hat{A}C$$

$$= \frac{۱}{۲}BD + \frac{۱}{۲}AD$$

$$= \frac{۱}{۲}(BD + AD)$$

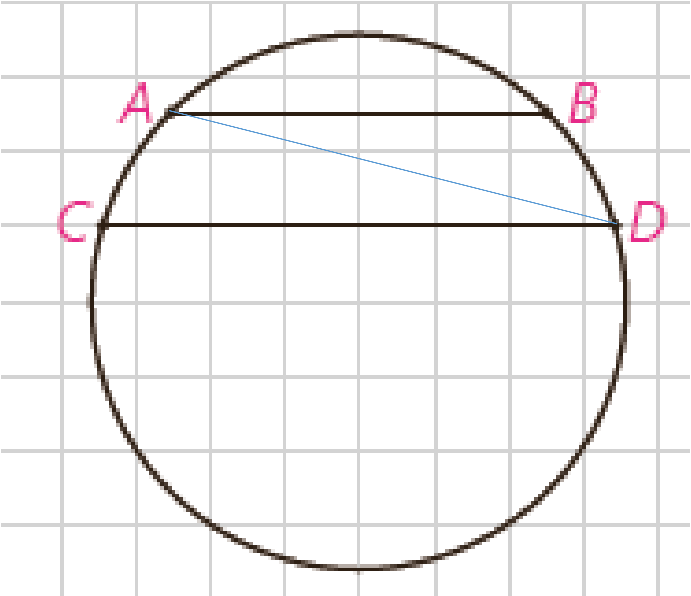
$$B\hat{A}C = \frac{۱}{۲}(BDA)$$

بنابراین :

قضیه: اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر است با ....نصف... کمان روبه‌رو به آن زاویه.

کار در کلاس

۱ــ در شکل مقابل وترهای AB و CD موازی هستند.



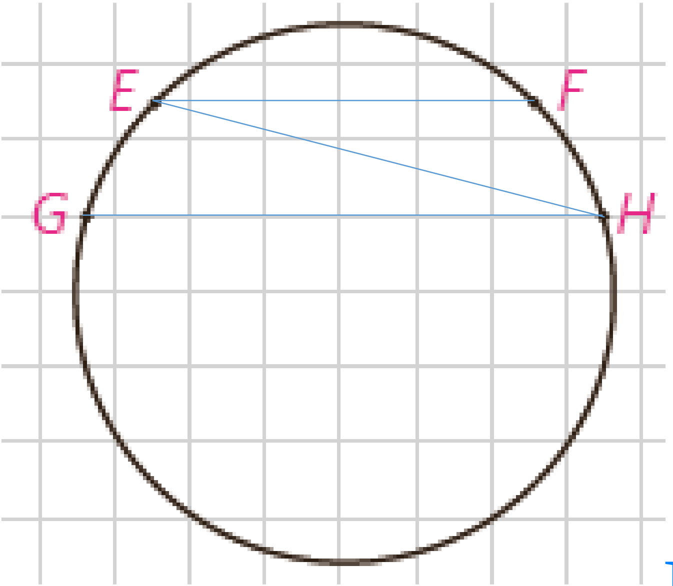
الف) از A به D وصل کنید. زوایای BAD و ADC نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

بنا به قضیهٔ خطوط موازی و مورب با هم برابرند

ب) کمان‌های $\overset{\frown}{BD}$ و $\overset{\frown}{AC}$ نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

با هم برابرند چون زاویه های محاطی روبرو به آنها با هم برابرند

۲ــ در شکل مقابل کمان‌های EG و FH هم‌اندازه‌اند.



الف) وترهای EF و GH و پاره‌خط EH را رسم کنید.

ب) زوایای FEH و EHG نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

با هم برابرند چون

$$\left.\begin{array}{l} FEH = \frac{۱}{۲} FH \\ EHG = \frac{۱}{۲} EG \\ EG = FH \end{array}\right\} \Rightarrow FEH = EHG$$

پ) وترهای EF و GH نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

بنا به عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب با هم موازی اند

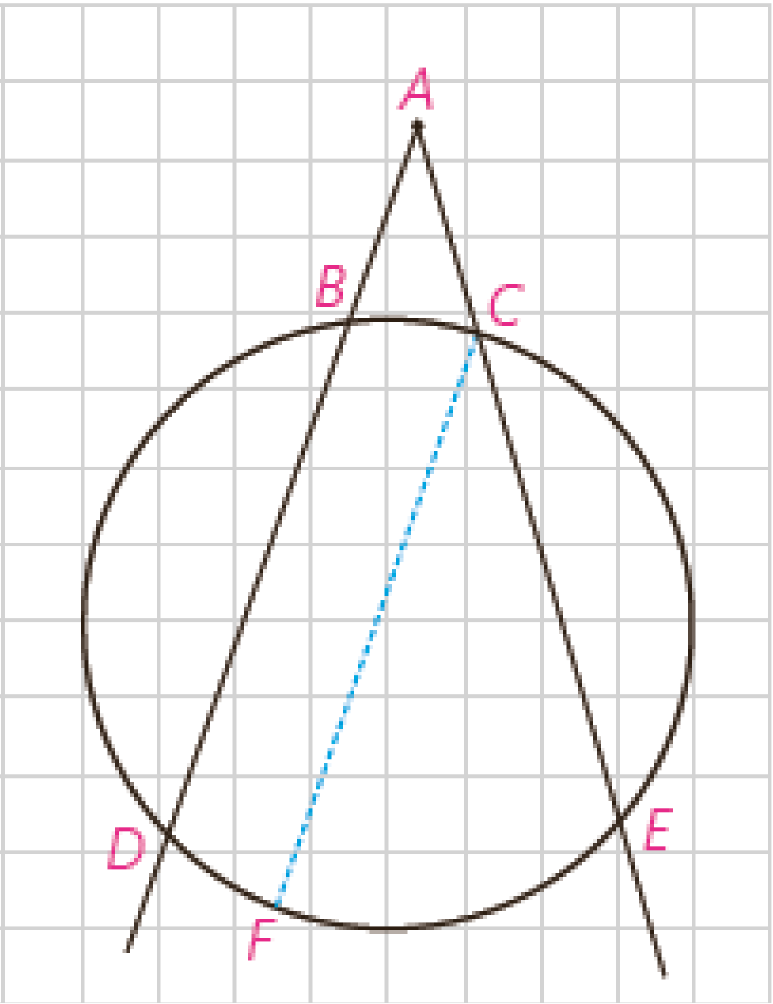
نتیجه

دو وتر که یکدیگر را درون دایره قطع نمی‌کنند با هم موازی‌اند، اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آنها مساوی باشد.

فعالیت

۱ــ فرض کنید رأس زاویهٔ DAE مانند شکل مقابل بیرون دایره واقع شده، و کمان‌های DE و BC توسط اضلاع زاویهٔ موردنظر مشخص شده باشد.

الف) از نقطهٔ C خطی موازی خط BD رسم کنید تا دایره را در نقطه‌ای مانند F قطع کند. علت هرکدام از تساوی‌های زیر را مشخص کنید.

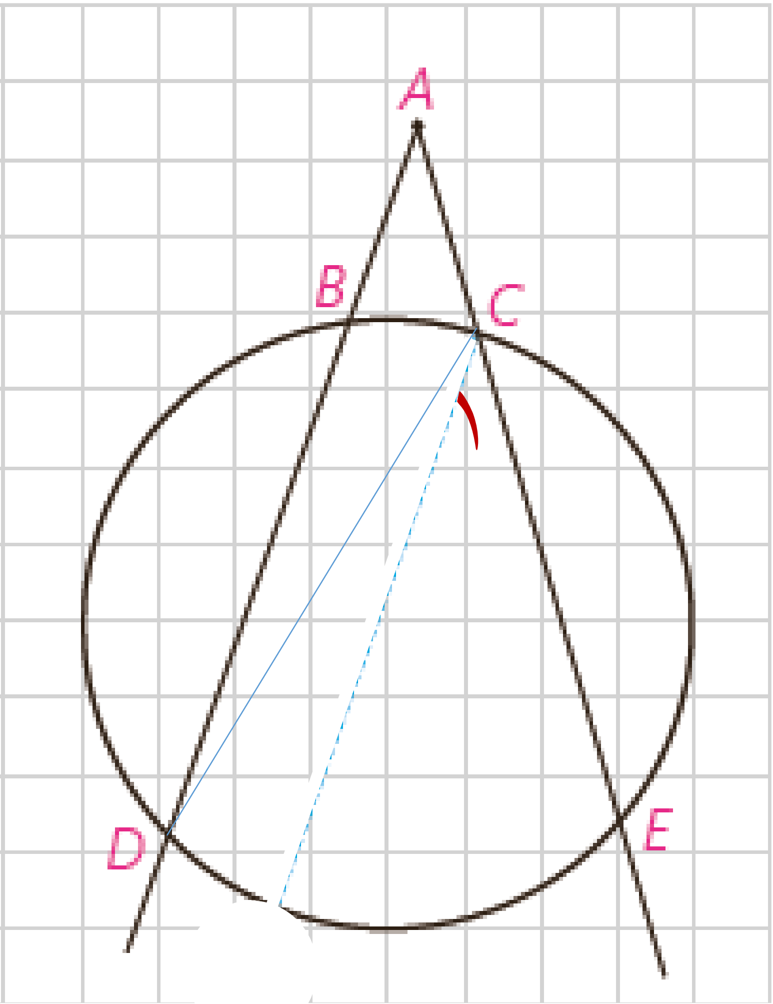


$$\hat{A} = \hat{C}$$ بنا به قضیهٔ خطوط موازی و مورب

$$= \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{FE}$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(\overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{DF}\right)$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(\overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{BC}\right)$$



ب) از C به D وصل کنید و به کمک زاویه خارجی در مثلث ACD رابطهٔ فوق را اثبات کنید.

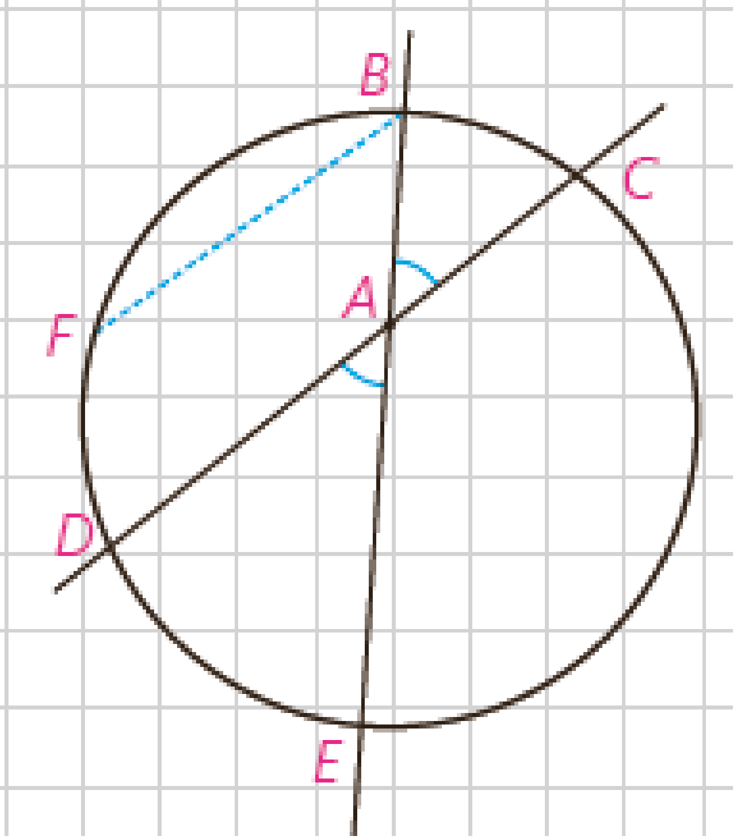
$\hat{C}_۱$ زاویهٔ خارجی مثلث ACD است پس

$$\hat{A}+\hat{D}=\hat{C}_۱$$

$$\Rightarrow \hat{A}=\hat{C}_۱-\hat{D}$$

$$\Rightarrow \hat{A}=\frac{۱}{۲}DE-\frac{۱}{۲}BC$$

$$\Rightarrow \hat{A}=\frac{۱}{۲}(DE-BC)$$



۲ــ رأس زاویهٔ DAE مانند شکل در درون دایره است و اضلاع این زاویه کمان‌های BC و DE را مشخص کرده‌اند.

الف) از نقطهٔ B خطی موازی خط DC رسم کنید تا دایره را در نقطه‌ای مانند F قطع کند. علت هرکدام از تساوی‌های زیر را مشخص کنید.

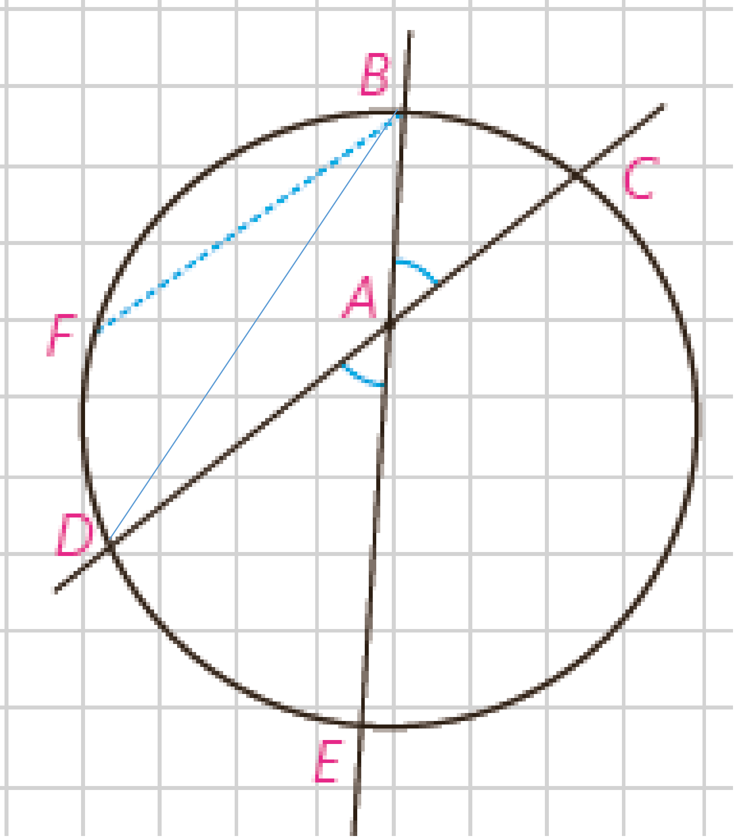
خطوط موازی و مورب

با توجه به شکل

$$\widehat{DAE}=\widehat{FBE}=\frac{1}{2}\widehat{FE}=\frac{1}{2}(\widehat{FD}+\widehat{DE})=\frac{1}{2}(\widehat{BC}+\widehat{DE})$$

اندازه زاویه محاطی نصف کمان روبروی آن است

کمانهای محصور بین دو وتر موازی برابرند



ب) از B به D وصل کنید و به کمک زاویه خارجی مثلث ABD رابطهٔ فوق را اثبات کنید.

$$D\hat{A}E = B\hat{D}A + D\hat{B}A$$

$$= \frac{۱}{۲}BC + \frac{۱}{۲}DE$$

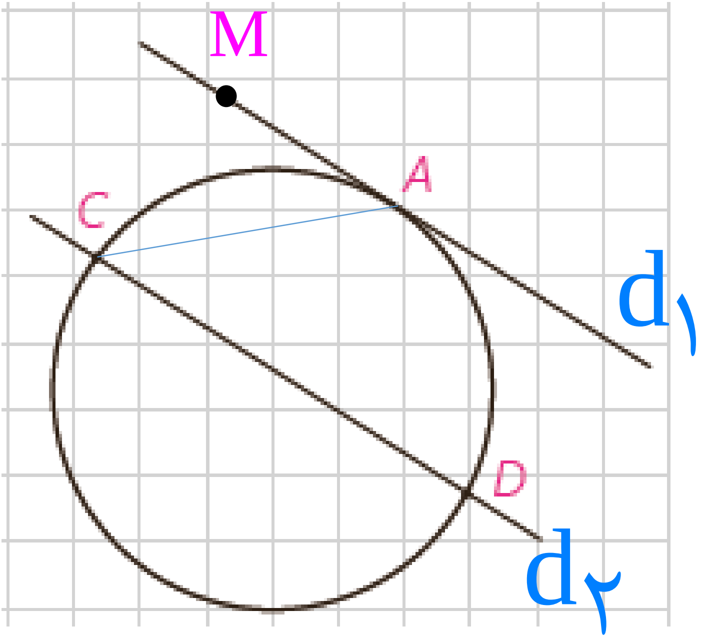
$$D\hat{A}E = \frac{۱}{۲}(BC + DE)$$

تمرین

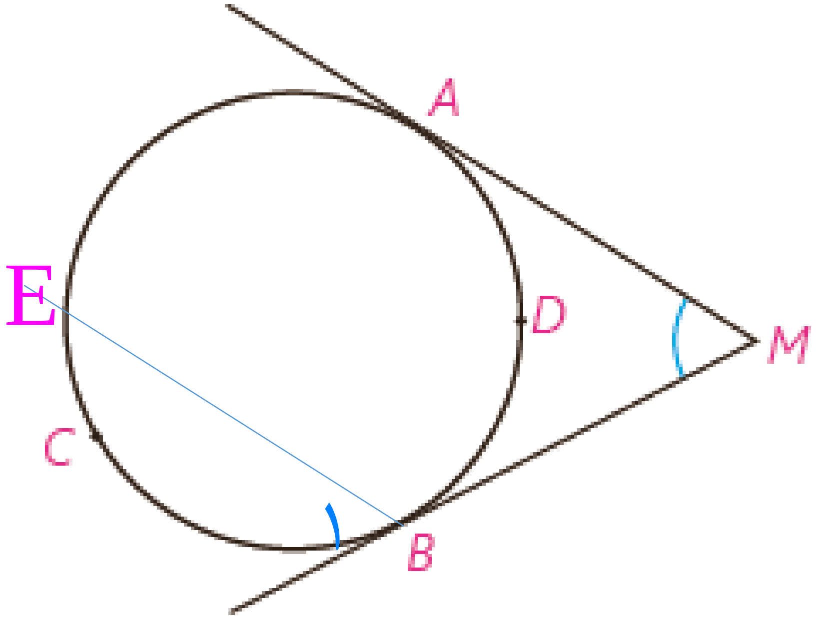
۱ــ در شکل‌های زیر ثابت کنید :

راهنمایی: از نقطهٔ B خطی موازی ضلع دیگر زاویه رسم کنید.

الف) $d_2 \parallel d_1$، ثابت کنید $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$



$$\left.\begin{aligned} &M\hat{A}C = \frac{1}{2} AC \\ d_1 \parallel d_2 \Rightarrow\ &M\hat{A}C = A\hat{C}D = \frac{1}{2} AD \end{aligned}\right\} \Rightarrow AC = AD$$



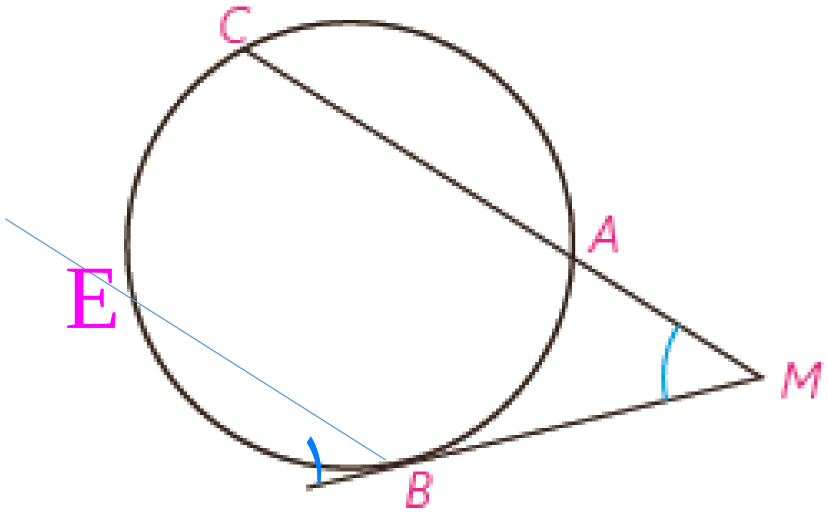
ب) $\hat{M} = \dfrac{\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{ADB}}{\text{۲}}$

$$\hat{M} = \hat{B}_{\text{۱}} = \frac{BE}{\text{۲}} = \frac{ACB - AE}{\text{۲}}$$

$$\hat{M} = \frac{ACB - ADB}{\text{۲}}$$

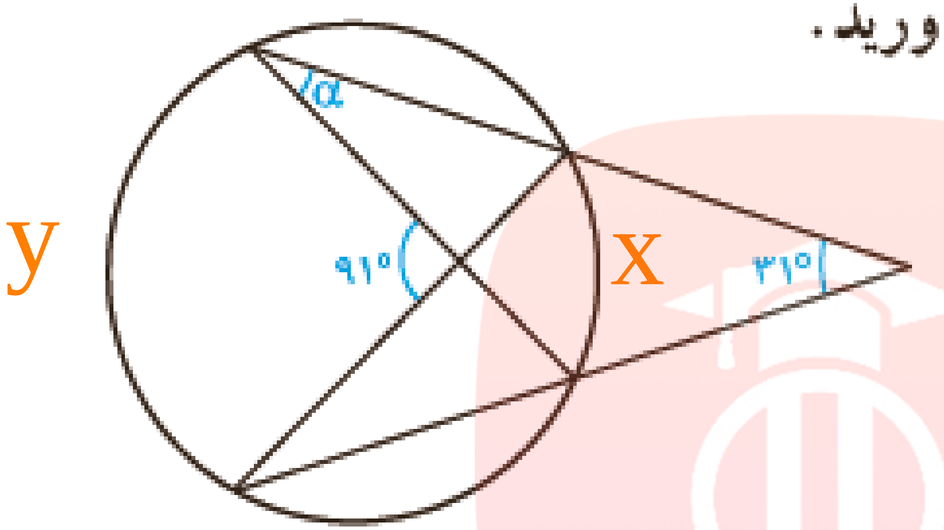
پ) $\hat{M} = \dfrac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AB}}{۲}$

$$\hat{M} = \hat{B}_۱ = \frac{BE}{۲} = \frac{CB - CE}{۲}$$



$$CE = AB \Longrightarrow \hat{M} = \frac{CB - AB}{۲}$$

۲ــ در شکل مقابل اندازهٔ زاویهٔ α را به‌دست آورید.

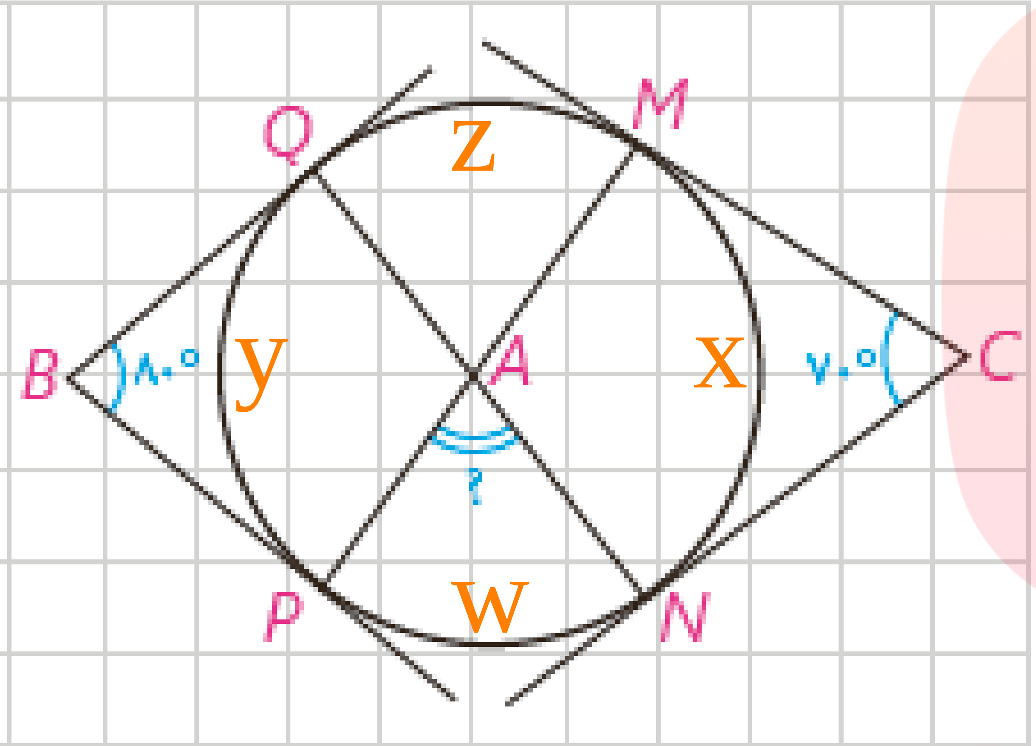


$$\frac{x+y}{۲}=۹۱^\circ \xrightarrow{x=۲\alpha} ۲\alpha+y=۱۸۲^\circ \qquad (۱)$$

$$\frac{y-x}{۲}=۳۱^\circ \xrightarrow{x=۲\alpha} y-۲\alpha=۶۲^\circ \qquad (۲)$$

$$(۱)-(۲) \Rightarrow ۴\alpha=۱۲۰^\circ \Rightarrow \alpha=۳۰^\circ$$

۳ــ در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ چند درجه است؟



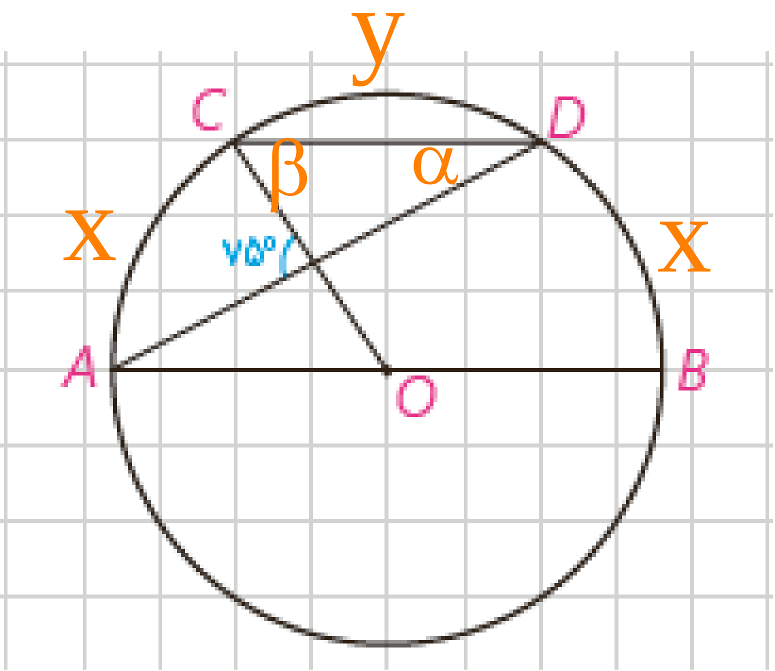
$$\frac{y+z+w-x}{۲}=۷۰^\circ \quad (۱)$$

$$\frac{z+x+w-y}{۲}=۸۰^\circ \quad (۲)$$

$$(۱)+(۲) \Rightarrow z+w=۱۵۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}=\frac{z+w}{۲}=۷۵^\circ$$

۴ــ در دایره رسم شده شکل مقابل $CD \parallel AB$، اندازه کمان CD را به‌دست آورید.



$$\left.\begin{array}{l} C\hat{O}A = x \\ C\hat{O}A = \beta \\ x = ۲\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow x = \beta = ۲\alpha$$

زاویه ی خارجی درمثلث : $\alpha + \beta = ۷۵^\circ$

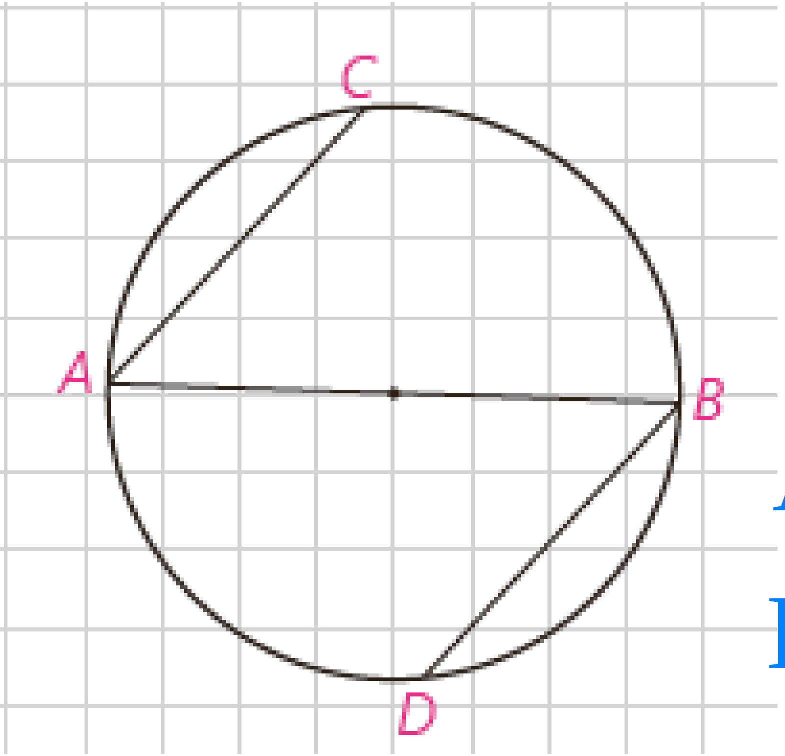
$$\Rightarrow \alpha + ۲\alpha = ۷۵^\circ \Rightarrow ۳\alpha = ۷۵^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = ۲۵^\circ \Rightarrow x = \beta = ۲\alpha = ۵۰^\circ$$

$$\Rightarrow y = ۱۸۰^\circ - ۲x = ۱۸۰^\circ - ۱۰۰^\circ = ۸۰^\circ$$

۵ــ در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند.

ثابت کنید: $AC = BD$

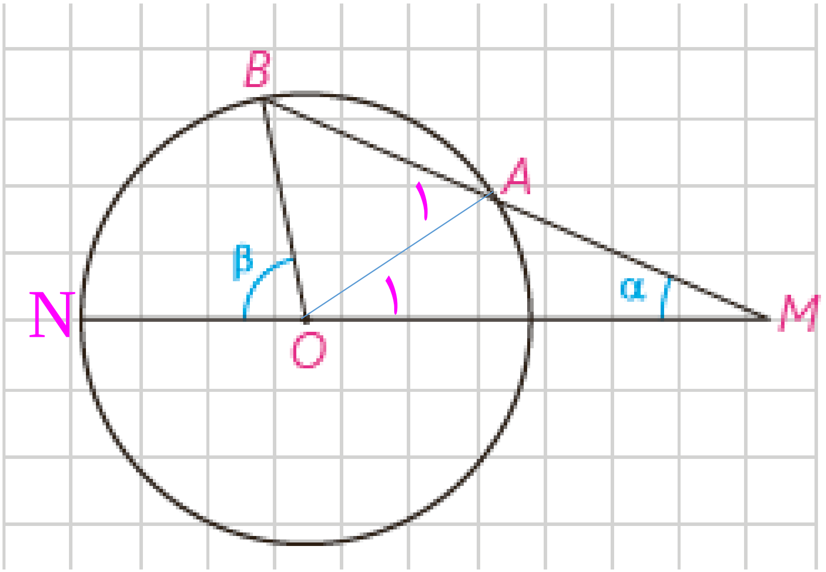


خطوط موازی و مورب : $\hat{A} = \hat{B} \Rightarrow BC = AD$

$$\left.\begin{array}{l} AC = ۱۸۰^\circ - BC \\ BD = ۱۸۰^\circ - AD \\ \\ BC = AD \end{array}\right\} \Rightarrow AC = BD$$

$\Rightarrow AC = BD$

۶ــ دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض است. از نقطهٔ M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است و $MA = R$؛ نشان دهید: $\beta = ۳\alpha$



$\overset{\Delta}{OAM}$: $OA = AM \Rightarrow \hat{O}_۱ = \alpha$

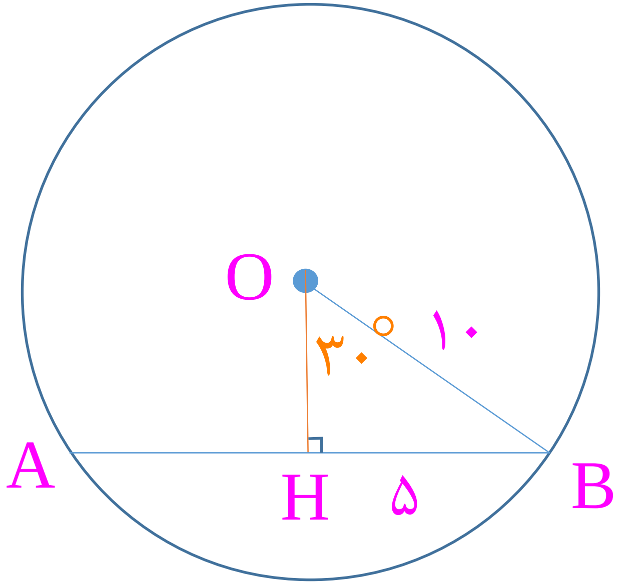
$\overset{\Delta}{OAM}$ زاویهٔ خارجی $O\hat{A}B \Rightarrow \hat{A}_۱ = \alpha + \alpha = ۲\alpha$

$OA = OB \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_۱ = ۲\alpha$

$\overset{\Delta}{OBM}$ زاویهٔ خارجی $B\hat{O}N \Rightarrow \beta = \hat{B} + \hat{M}$

$\Rightarrow \beta = ۲\alpha + \alpha = ۳\alpha$

۷ــ در دایرهٔ $C(O,R)$، $\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$ و $AB = ۱۰$ فاصلهٔ O از وتر AB را به دست آورید.



$$OH^۲ = OB^۲ - BH^۲$$

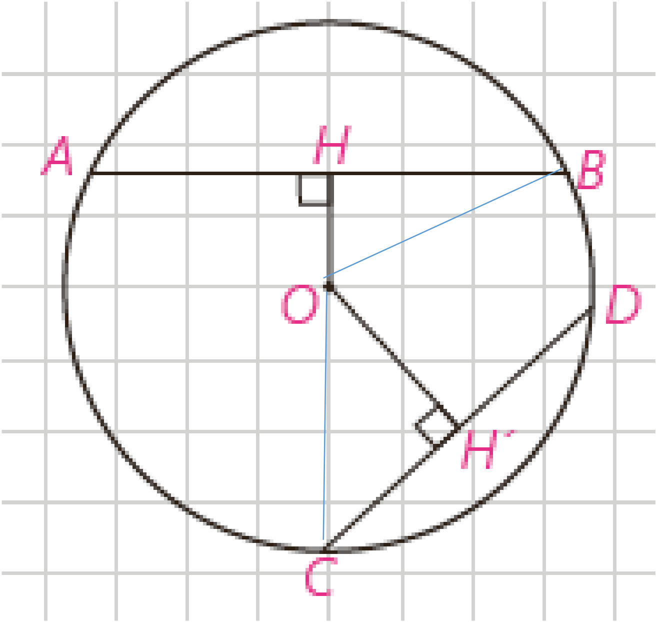
$$OH^۲ = ۱۰۰ - ۲۵ = ۷۵$$

$$OH = ۵\sqrt{۳}$$

۸ــ در دایرهٔ $C(O,R)$ نشان دهید $AB > CD$ اگر و تنها اگـــر $OH < OH'$

(OH و OH' فاصلهٔ O از دو وتر AB و CD هستند.)

راهنمایی: از O به B و C وصل، و از قضیهٔ فیثاغورس استفاده کنید.



$$AB > CD \Leftrightarrow \frac{۱}{۲}AB > \frac{۱}{۲}CD$$

$$\Leftrightarrow BH > CH' \Leftrightarrow BH^{۲} > CH'^{۲}$$

$$\Leftrightarrow R^{۲} - OH^{۲} > R^{۲} - OH'^{۲}$$

$$\Leftrightarrow -OH^{۲} > -OH'^{۲} \Leftrightarrow OH^{۲} < OH'^{۲}$$

$$\Leftrightarrow OH < OH'$$

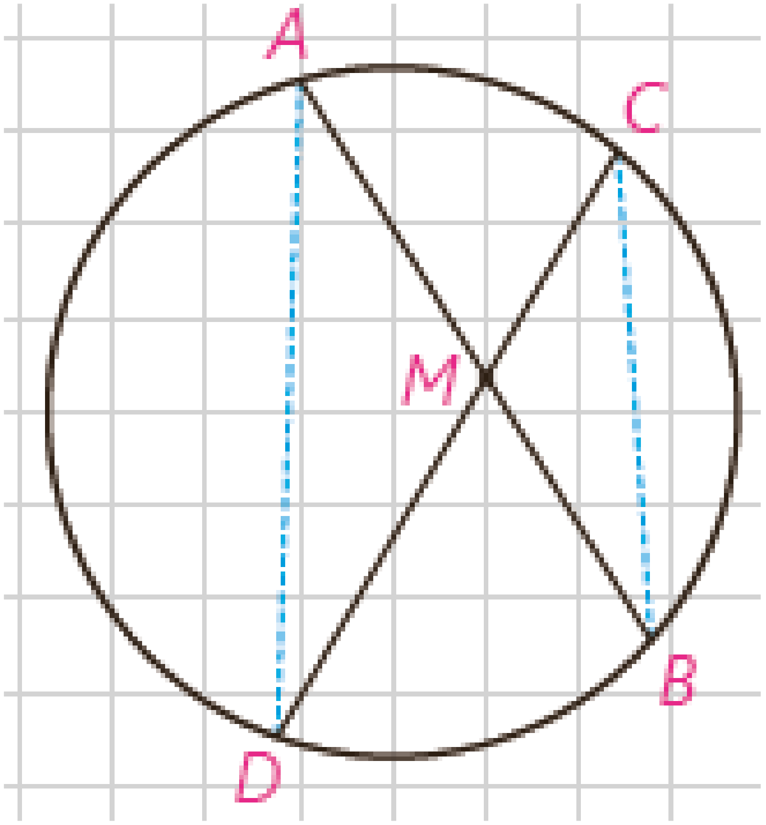
درس دوم

رابطه‌های طولی در دایره

فعالیت

۱ــ دو وتر AB و CD در نقطهٔ M در داخل دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند.

الف) از A به D و از C به B وصل کنید و نشان دهید دو مثلث MAD و MBC متشابه‌اند.

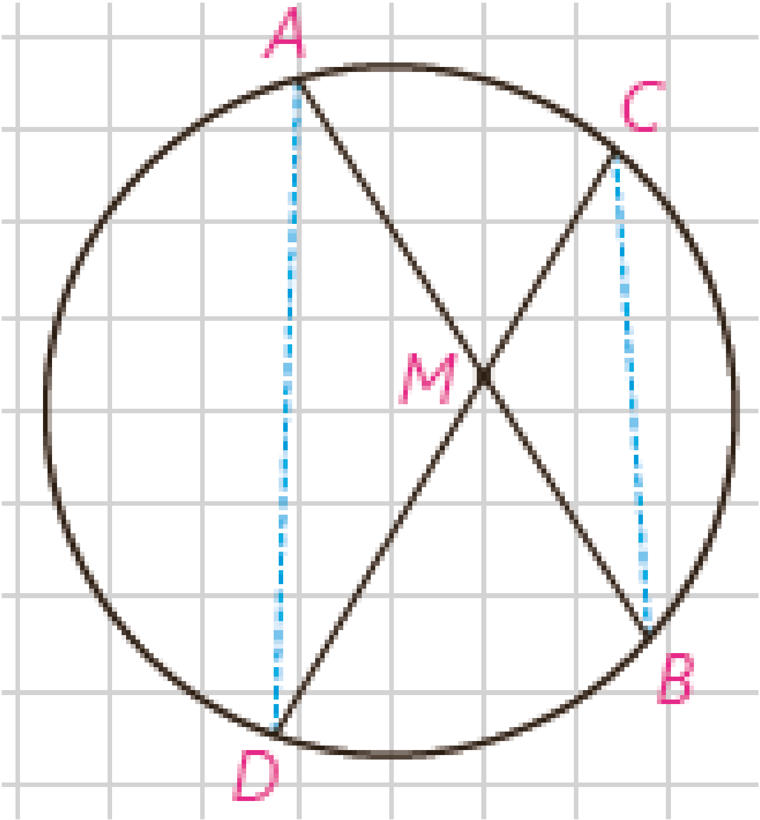


$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{C}=\frac{۱}{۲}BD \\ \hat{B}=\hat{D}=\frac{۱}{۲}AC\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{MAD} \sim \overset{\triangle}{MBC}$$

ب) با توجه به تشابه این دو مثلث داریم: $\frac{AM}{CM}=\frac{DM}{BM}$

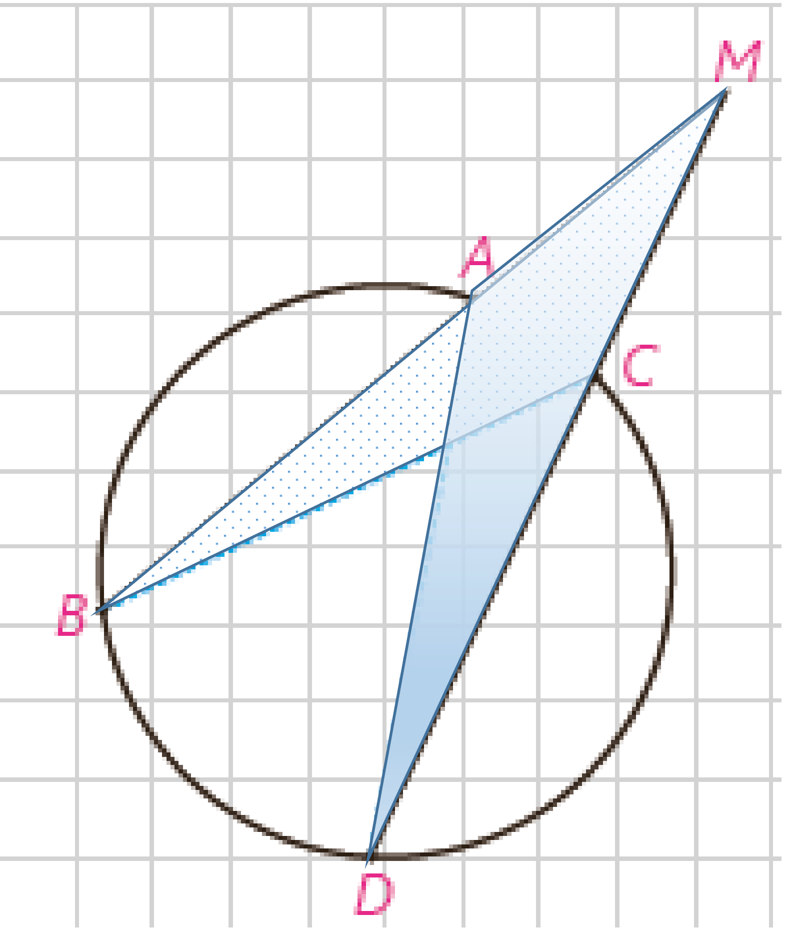
$$\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM}$$

۱ و در نتیجه: $AM.BM = CM.DM$



۲ــ خط‌های شامل دو وتر AB و CD در نقطهٔ M در خارج دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند.

الف) نقطهٔ A را به D و نقطهٔ C را به B وصل کنید و نشان دهید دو مثلث MAD و MCB باهم متشابه‌اند.

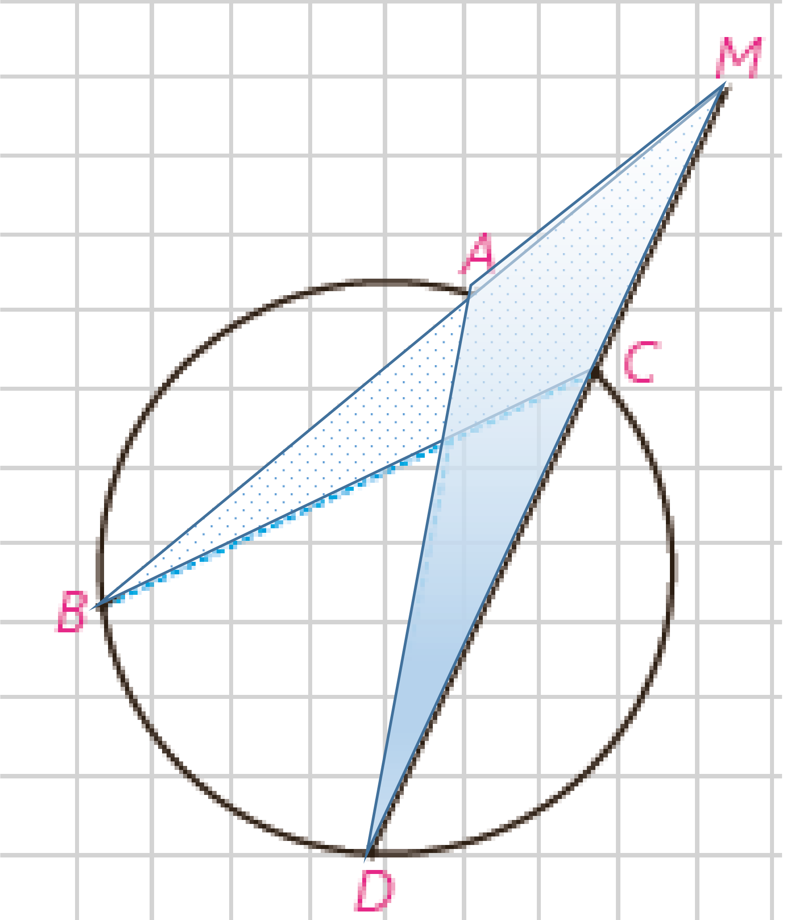


$$\left.\begin{array}{l}\hat{M}=\hat{M}\\ \hat{B}=\hat{D}=\frac{۱}{۲}AC\end{array}\right\}\overset{\text{زز}}{\Longrightarrow}\overset{\triangle}{MAD}\sim\overset{\triangle}{MBC}$$

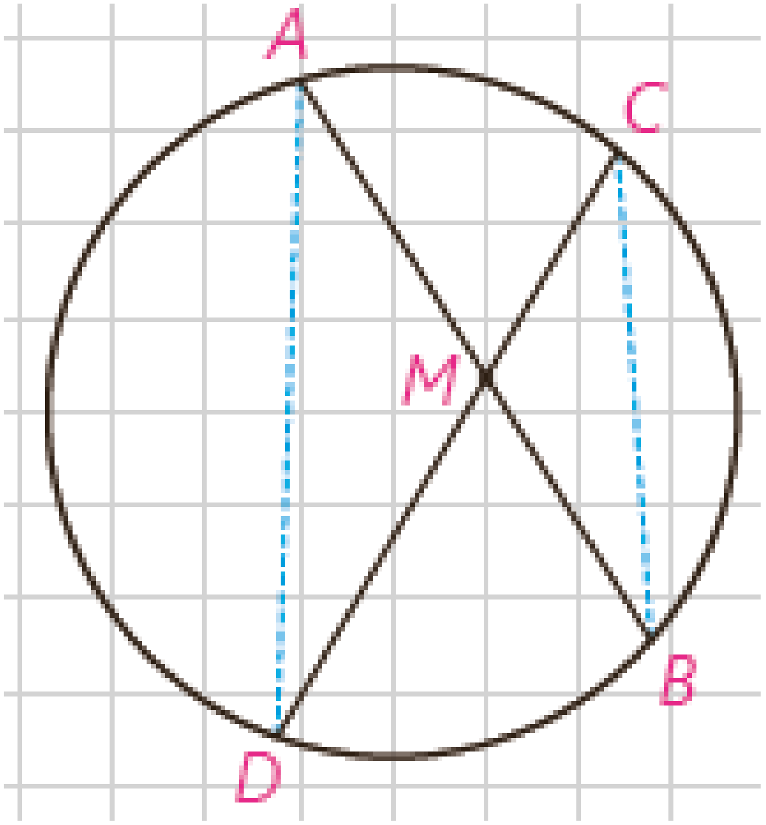
ب) با توجه به این تشابه داریم: $\frac{MA}{MC}=\frac{MD}{MB}$

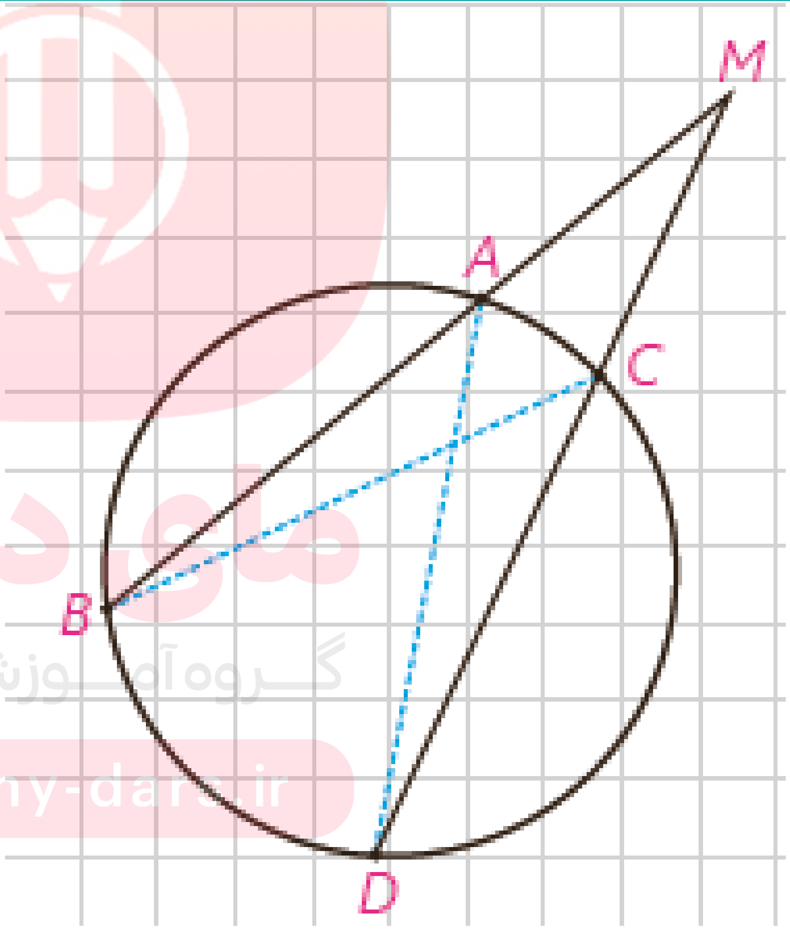
$$\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB}$$

۲ و در نتیجه: $MA.MB = MC.MD$



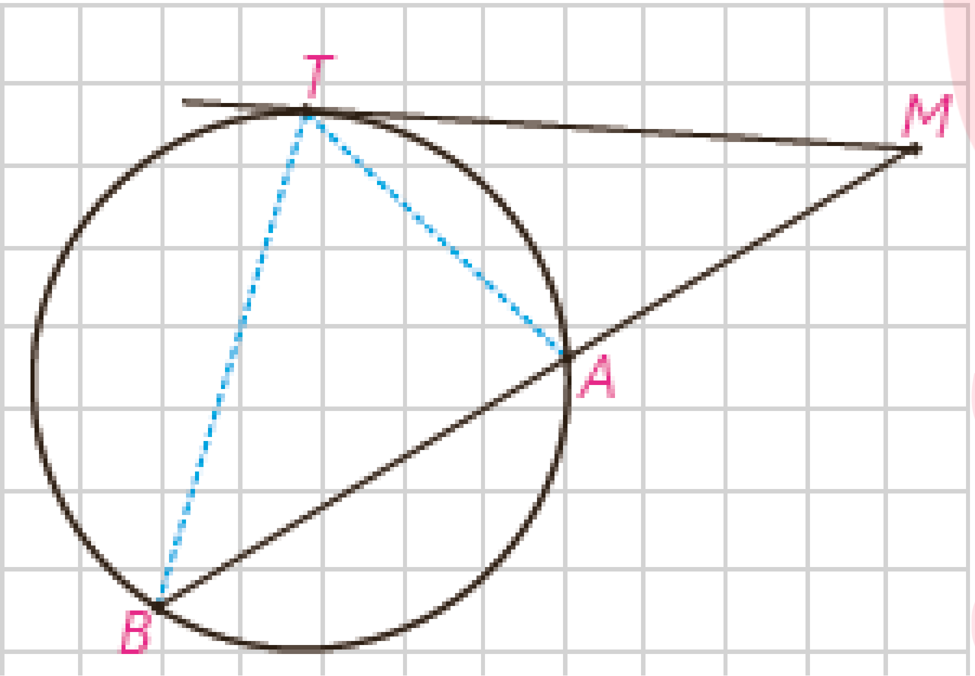
قضیه: هرگاه خط‌های شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه‌ای مانند M (درون یا بیرون دایره) یکدیگر را قطع کنند. آن‌گاه: $MA.MB = MC.MD$





۳ــ فرض کنیم از نقطهٔ M (خارج دایره) مانند شکل یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کرده‌ایم.

الف) T را به A و B وصل، و مشخص کنید چرا؟ $\widehat{MTA} = \widehat{TBM}$



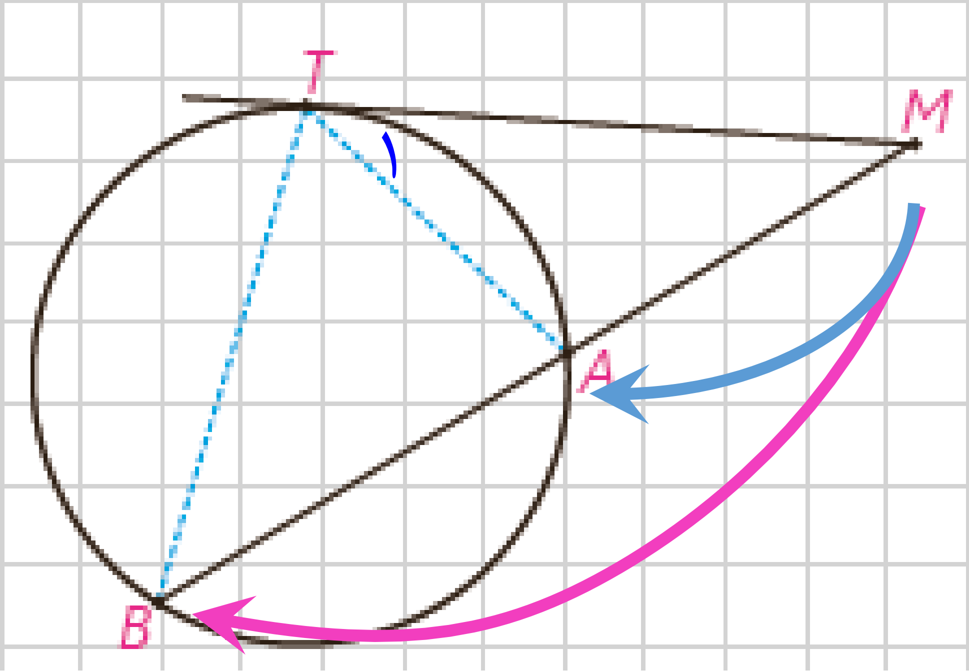
چون زاویه های محاطی و ظلی روبرو به یک کمان باهم برابرند یا به عبارتی

$$TBM = MTA = \frac{AT}{۲}$$

ب) علت تشابه دو مثلث MAT و MTB را مشخص، و با توجه به این تشابه رابطهٔ زیر را کامل کنید.

$$\left.\begin{aligned}\hat{B} = \hat{T}_1 = \tfrac{1}{2}\overset{\frown}{AT} \\ \hat{M} = \hat{M}\end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{MAT} \sim \overset{\Delta}{MBT}$$

$$\frac{MA}{MT} = \frac{MT}{MB}$$



و در نتیجه : $MT^2 = MA \cdot MB$

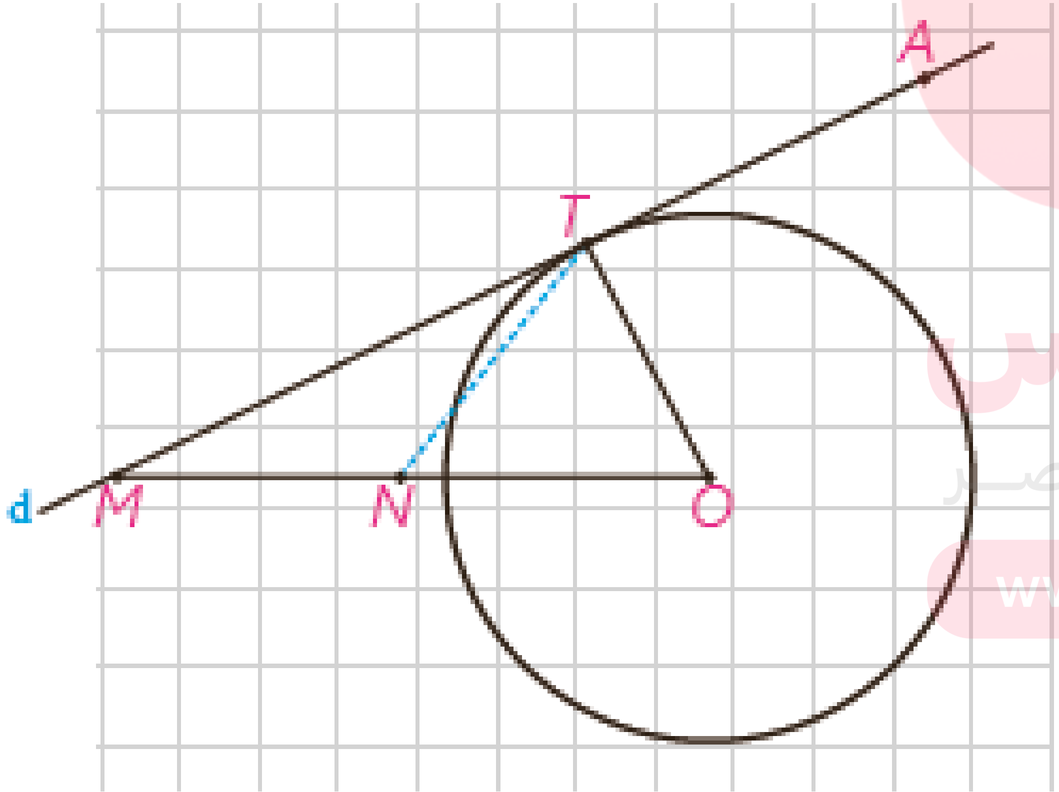
بنابراین قضیهٔ زیر را داریم :

قضیه: هرگاه M نقطه‌ای بیرون دایره باشد و از M مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم، مربع اندازهٔ مماس برابر است با حاصل‌ضرب اندازه‌های دو قطعهٔ قاطع

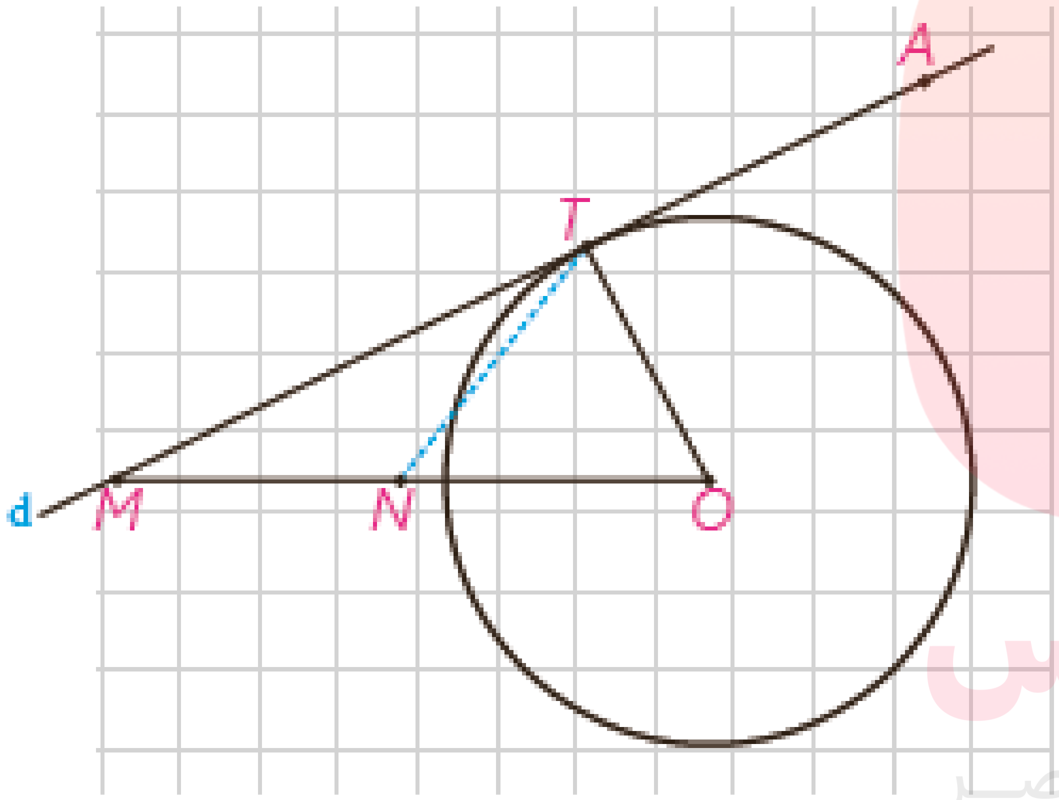
یعنی طول مماس واسطهٔ هندسی بین دو قطعهٔ قاطع است.

رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره

اگر خط d در نقطهٔ T بر دایره مماس باشد و A و M دو نقطه بر خط d در دوطرف نقطهٔ T باشد، هرکدام از پاره‌خط‌های MT و AT بر دایره مماس‌اند.



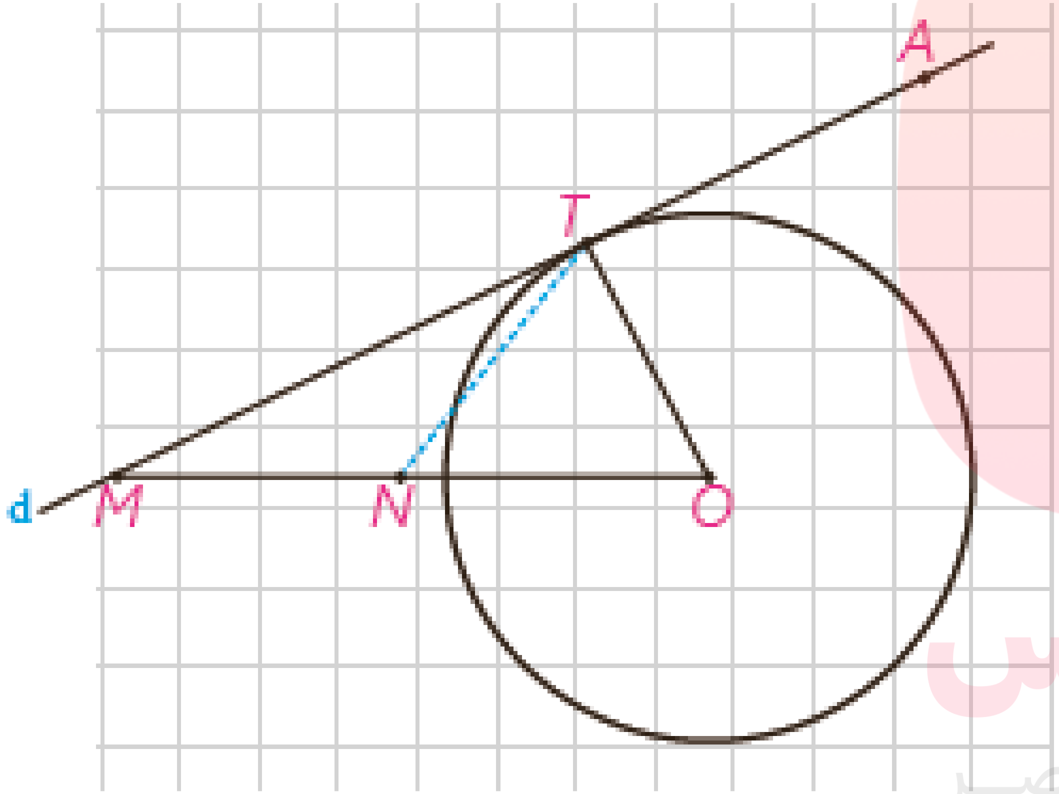
اگر O مرکز دایره باشد، ΔOMT دررأس T قائم‌الزاویه است؛ چرا؟



چون پاره خط مماس بر دایره بر شعاع دایره عمود است یعنی

$$MT \perp OT$$

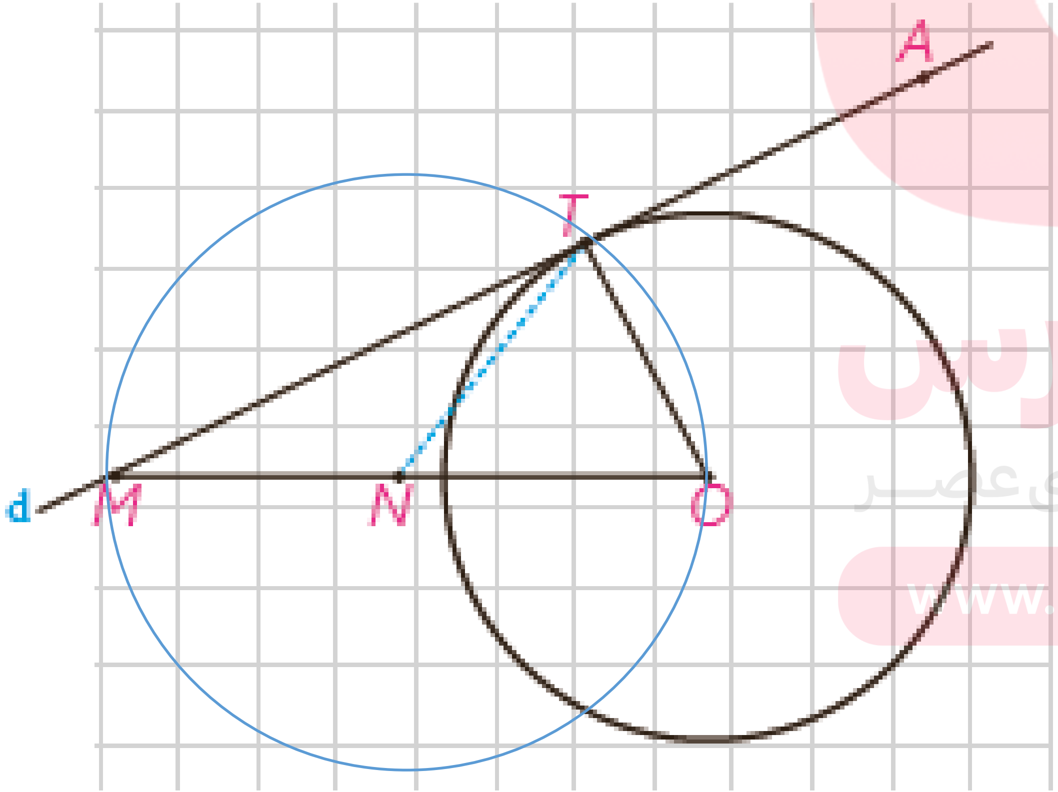
اگر N وسط پاره‌خط OM باشد، NM = NO = NT؛ چرا؟



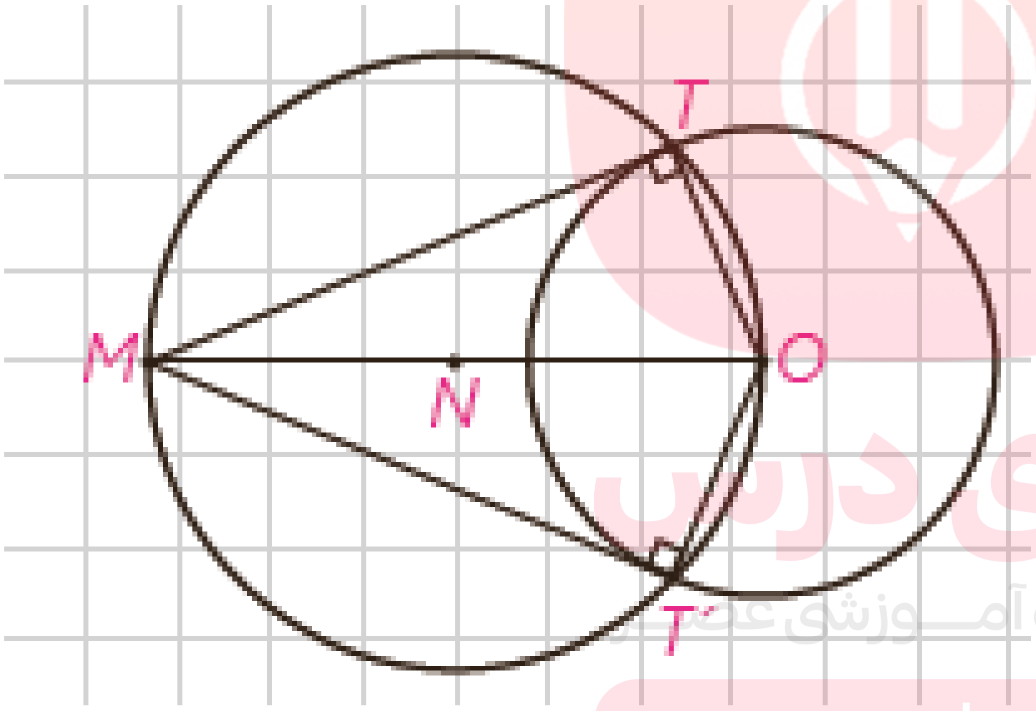
چون در مثلث قائم الزاویه میانه
وارد بر وتر نصف وتر است

بنابراین دایره به مرکز N و قطر OM از نقطه T می گذرد.

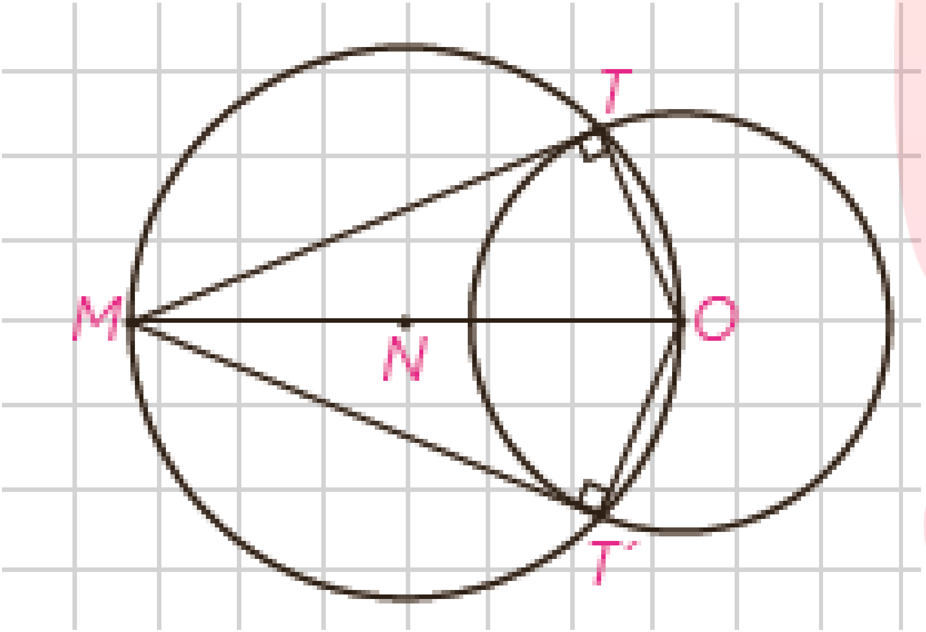
از این ویژگی می‌توانیم در رسم مماس بر دایره از نقطه M خارج دایره بر آن استفاده کنیم.



پس برای رسم مماس بر دایره از نقطه M خارج دایره، ابتدا دایره‌ای به قطر OM (O مرکز دایره) رسم می‌کنیم.



این دایره، دایره مفروض را در دو نقطه T و T′ قطع می‌کند. خط‌های MT و MT′ بر دایره مماس‌اند؛ چرا؟

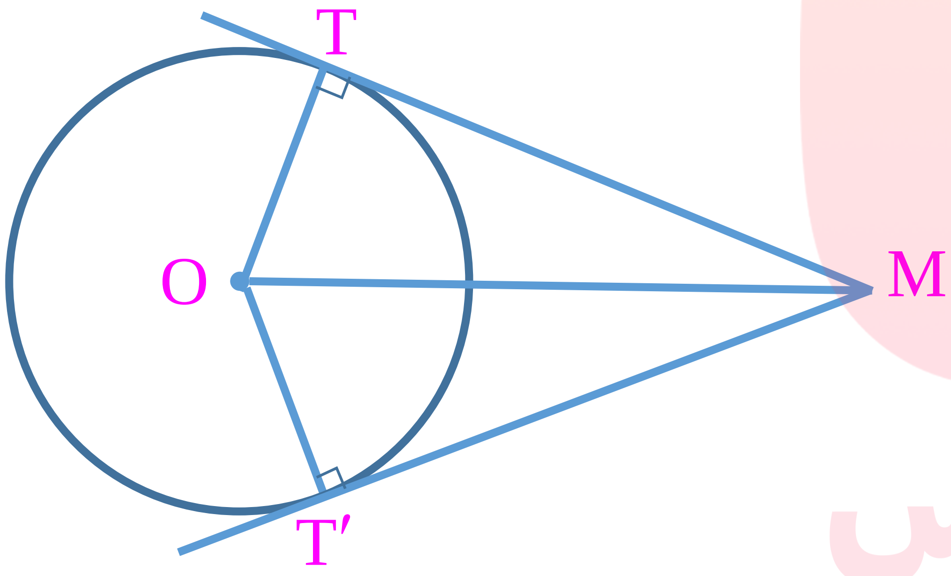


$$M\hat{T}O = M\hat{T'}O = \frac{MO}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ$$

کاردرکلاس

هرگاه از نقطه M خارج دایره C(O,R) دو مماس بر دایره رسم کنیم و T و T′ نقاط تماس باشند، ثابت کنید :

الف) اندازه‌های دو مماس برابرند.



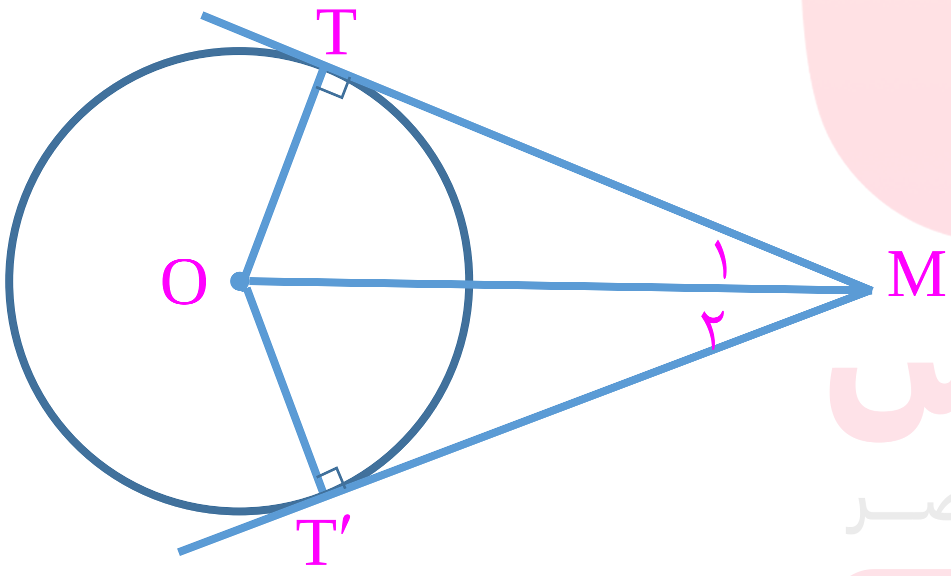
$$\left.\begin{aligned} OT = OT' = R \\ OM = OM \\ \hat{T} = \hat{T'} = 90^\circ \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{وض}} \overset{\triangle}{MOT} \cong \overset{\triangle}{MOT'}$$

تساوی اجزاءمتناظر $\Rightarrow MT = MT'$

ب) نیم‌خط MO نیمساز زاویه TMT' است.

با استفاده از قسمت قبل

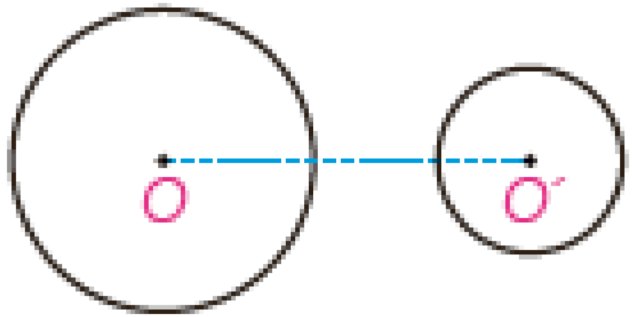
$$\overset{\triangle}{MOT} \cong \overset{\triangle}{MOT'} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

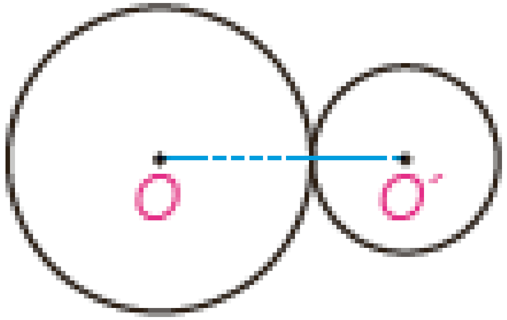


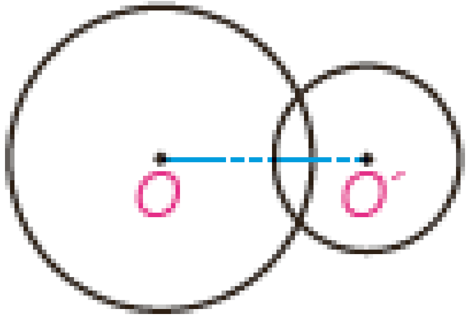
در نتیجه MO نیمساز زاویهٔ $T\hat{M}T'$ است

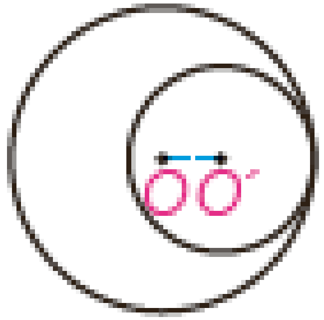
حالت‌های دو دایره نسبت به هم و مماس مشترک‌ها

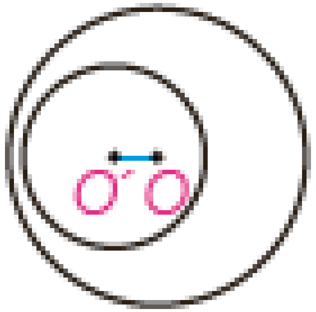
دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را با فرض $R > R'$ و $OO' = d$ درنظر می‌گیریم.
حالت‌های مختلفی که این دو دایره می‌توانند نسبت به هم داشته باشند به‌صورت زیر است :

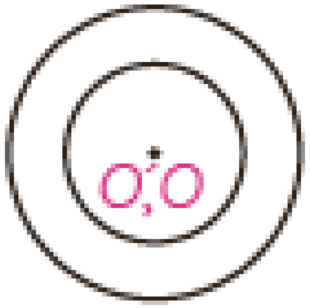
دو دایرهٔ برون هم (متخارج)	$d > R + R'$	

دو دایره مماس برون	$d = R + R'$	

دو دایره متقاطع	$R - R' < d < R + R'$	

دو دایره مماس درون	$d = R - R'$	

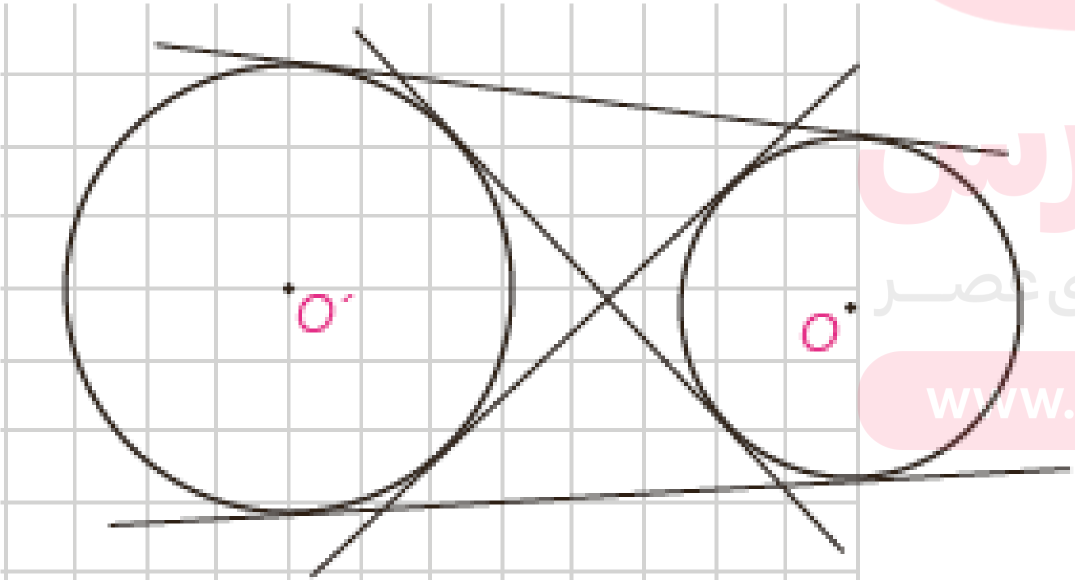
دو دایره متداخل	$d < R - R'$	

دایره‌های هم‌مرکز	d = ۰	

هر خطی یا پاره‌خطی که بر هردو دایره مماس باشد، مماس مشترک دو دایره است.

اگر دو دایره در یک طرفِ خط باشند، آن را مماس مشترک خارجی

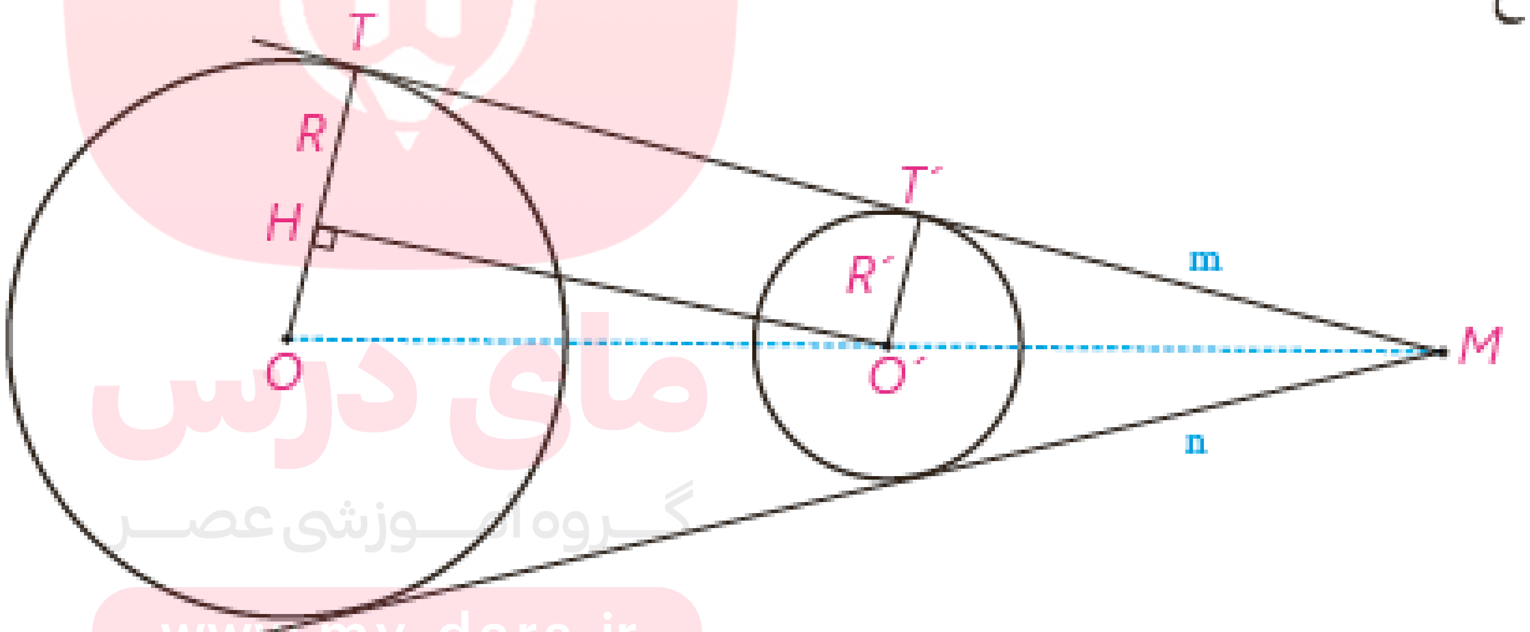
اگر دو دایره در دو طرف خط باشند آن را مماس مشترک داخلی می‌نامند.



فعالیت

۱ــ فرض کنیم مانند شکل خط m در نقاط T و T′ بر دو دایره مماس است و شعاع‌های OT و O′T′ رسم شده‌است. فرض کنیم فاصله بین مرکزهای دو دایره برابر d باشد؛ از O′ خطی موازی خط m رسم می‌کنیم تا شعاع OT را در نقطه‌ای مانند H قطع کند.

الف) TT′O′H مستطیل است؛ چرا؟



دو خط عمود بر یک خط با هم موازیند پس $O'T' \parallel TH$

بنا به فرض: $TT' \parallel O'H$

در نتیجه ۴ ضلعی $TT'O'H$ متوازی الاضلاعی است که دارای زاویه ی قائمه است پس مستطیل است

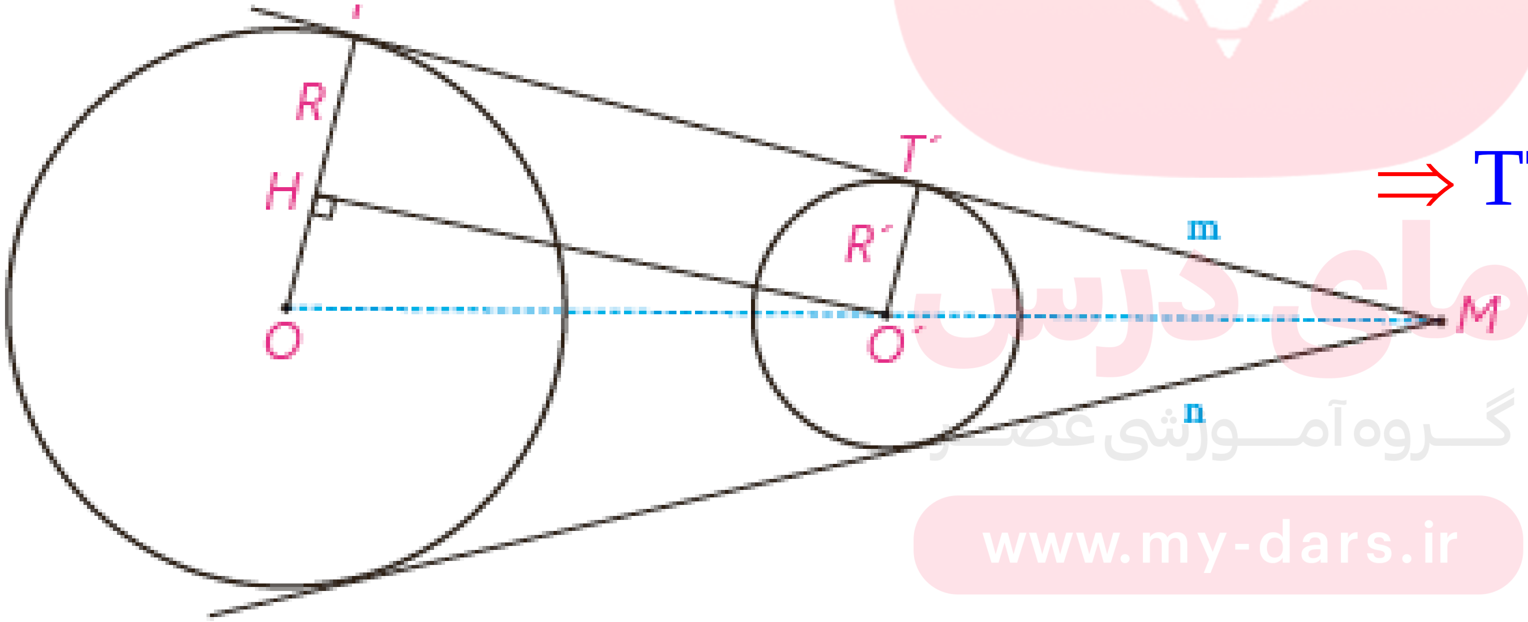
ب) با توجه به قضیه فیثاغورس در مثلث $O'HO$، تساوی زیر را توجیه کنید.

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R-R')^2}$$

$$O'H^2 + OH^2 = OO'^2 \Rightarrow O'H^2 = OO'^2 - OH^2$$

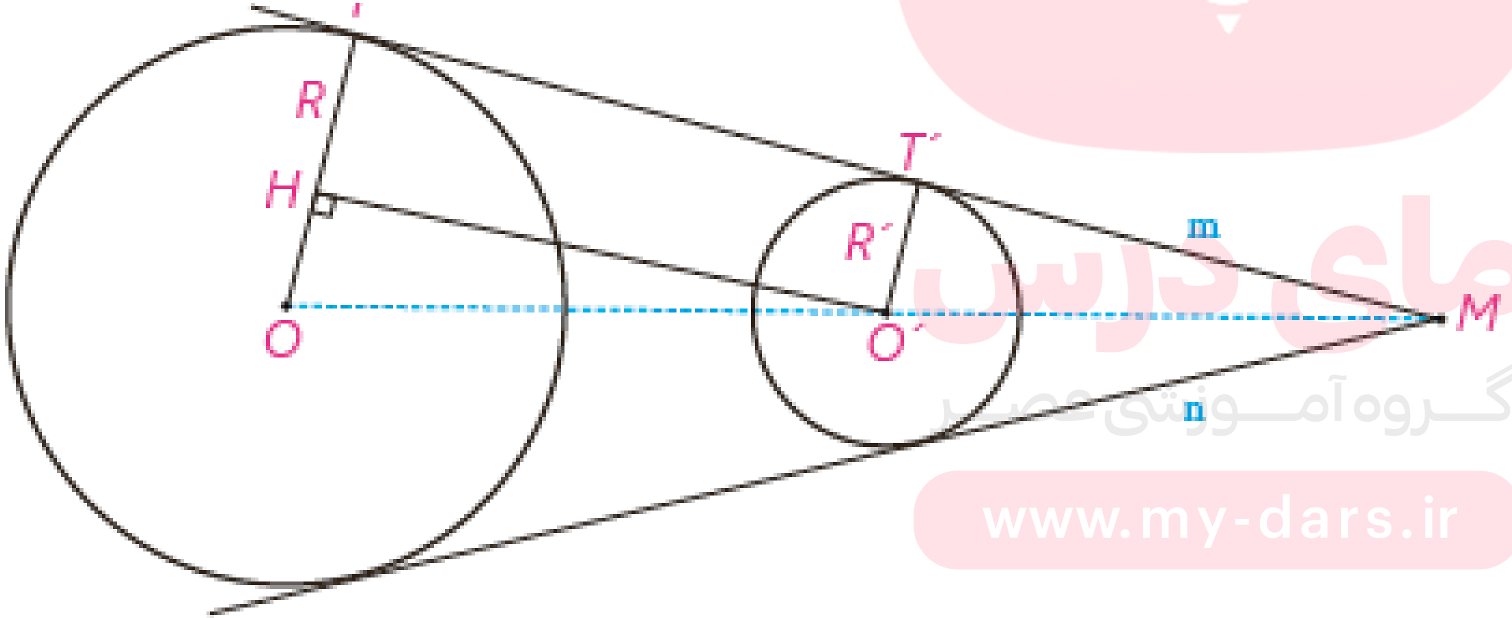
$$\Rightarrow TT'^2 = d^2 - (R-R')^2$$

$$\Rightarrow TT' = \sqrt{d^2 - (R-R')^2}$$



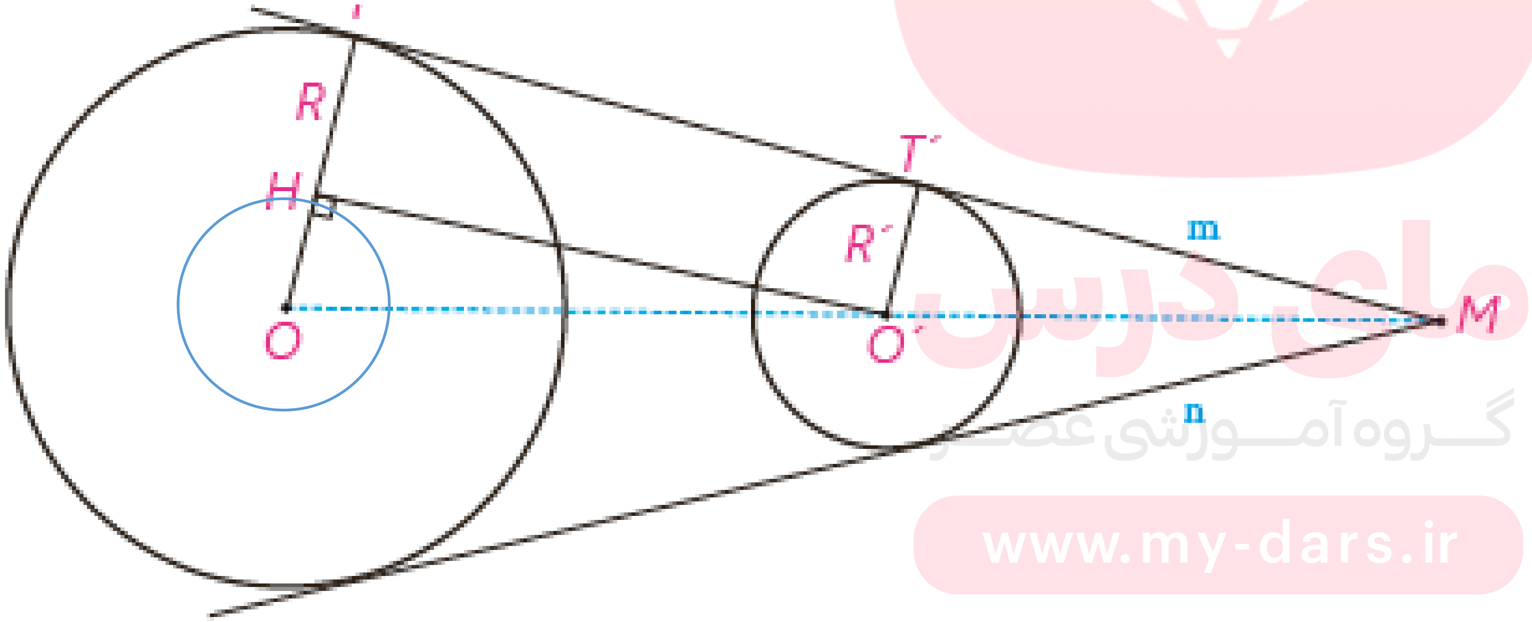
پ) با توجه به کار در کلاس قبل بگویید چرا اگر دو مماس مشترک m و n متقاطع باشند، نقطهٔ تقاطع آنها روی خط OO' خواهد بود؟

نقاط O و O' هر دو روی نیمساز زاویهٔ M قرار دارند به عبارت دیگر نقطه تقاطع و نقاط O و O' هرسه روی یک خط هستند و آن خط نیمساز زاویهٔ M است



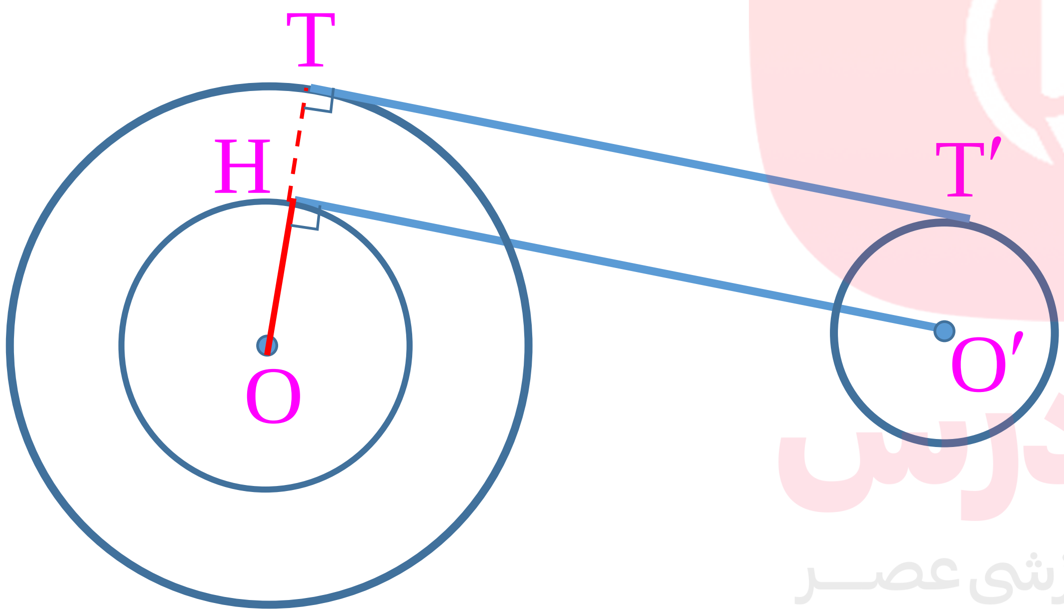
ت) به مرکز O و به شعاع $R-R'$ دایره‌ای رسم کنید. پاره‌خط $O'H$ برای دایرهٔ رسم شده چگونه خطی است؟

این پاره خط بر دایره مماس است چون بر شعاع دایره در نقطه تماس عمود است.



ث) فرض کنید دو دایره داده شده، و رسم مماس مشترک خواسته شده باشد.

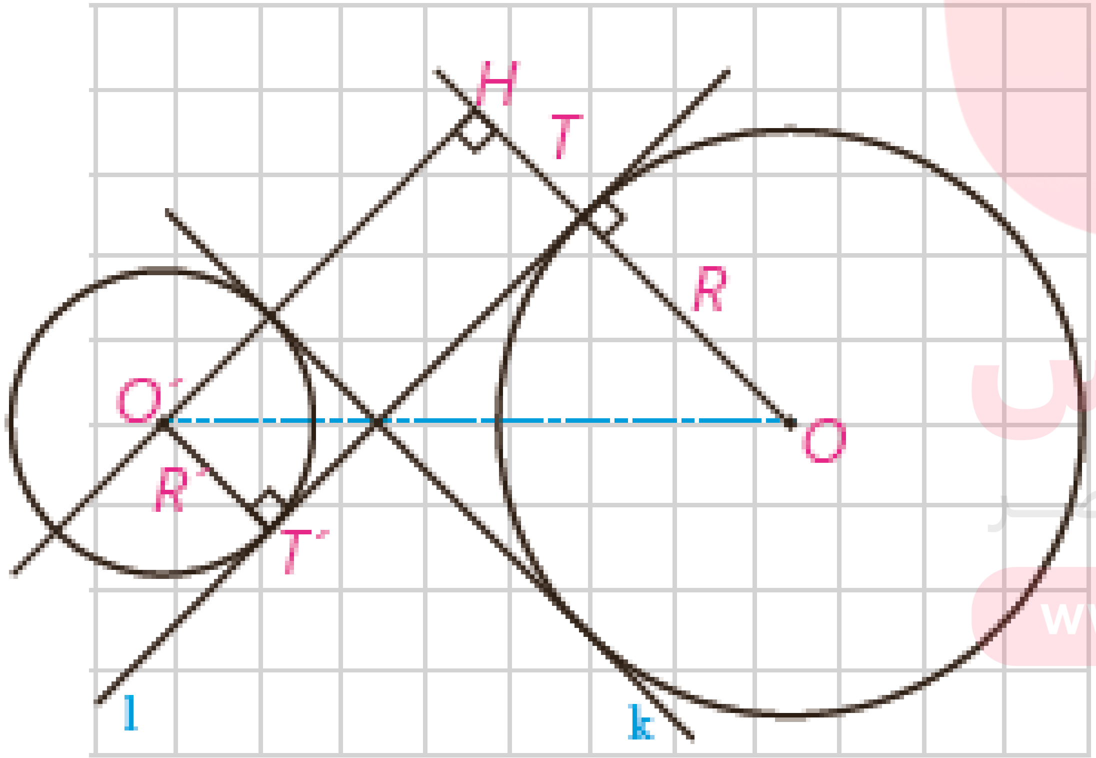
از آنجا که مرکزها و شعاع‌های دو دایره معلوم است، می‌توان دایرهٔ مطرح شده در قسمت (ت) را رسم کرد و سپس مماس $O'H$ را بر آن رسم کرد؛ در این‌صورت چگونه می‌توانید مماس TT' را رسم کنید؟



۲ــ دو مماس مشترک داخلی l و k بر دو دایره متخارج مطابق شکل رسم شده است.

با به کار بردن قضیه فیثاغورس در $\Delta O'OH$ نشان دهید[۱]:

$$TT' = \sqrt{d^{۲} - (R+R')^{۲}}$$

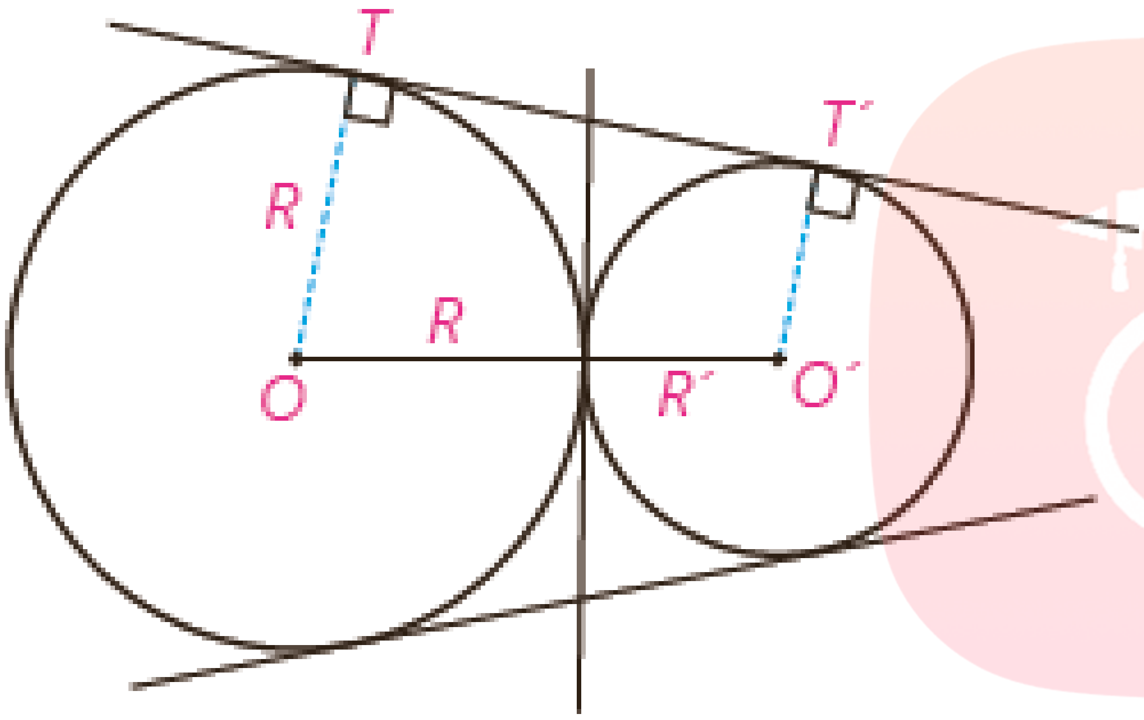


$$O'H^{۲} + OH^{۲} = OO'^{۲} \Rightarrow O'H^{۲} = OO'^{۲} - OH^{۲}$$

$$\Rightarrow TT'^{۲} = d^{۲} - (R+R')^{۲}$$

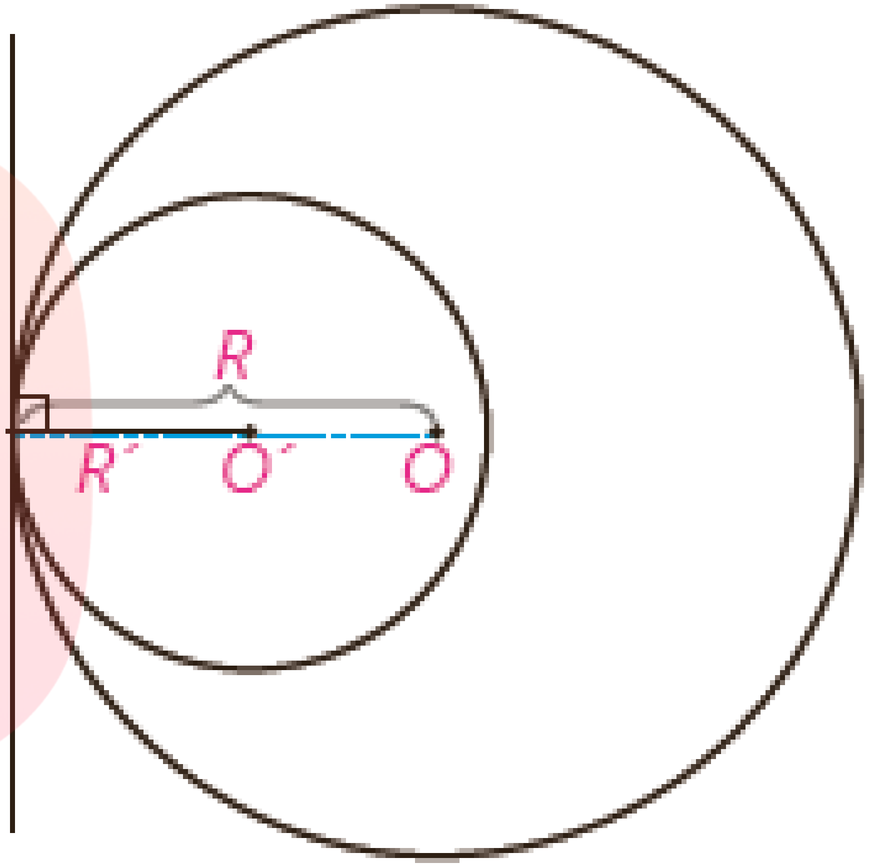
$$\Rightarrow TT' = \sqrt{d^{۲} - (R+R')^{۲}}$$

۳ــ دو دایره مماس. دو دایره را که فقط یک نقطه مشترک داشته باشند، مماس می‌نامند. در این نقطه مشترک یک خط بر هر دو مماس است. اگر مرکزهای دو دایره در دوطرف این مماس باشند، آن دو دایره، مماس برونی است و اگر هر دو مرکز در یک طرف این مماس باشند، آنها را مماس درونی می‌نامند.



مماس خارج‌اند؛
سه مماس مشترک دارند.

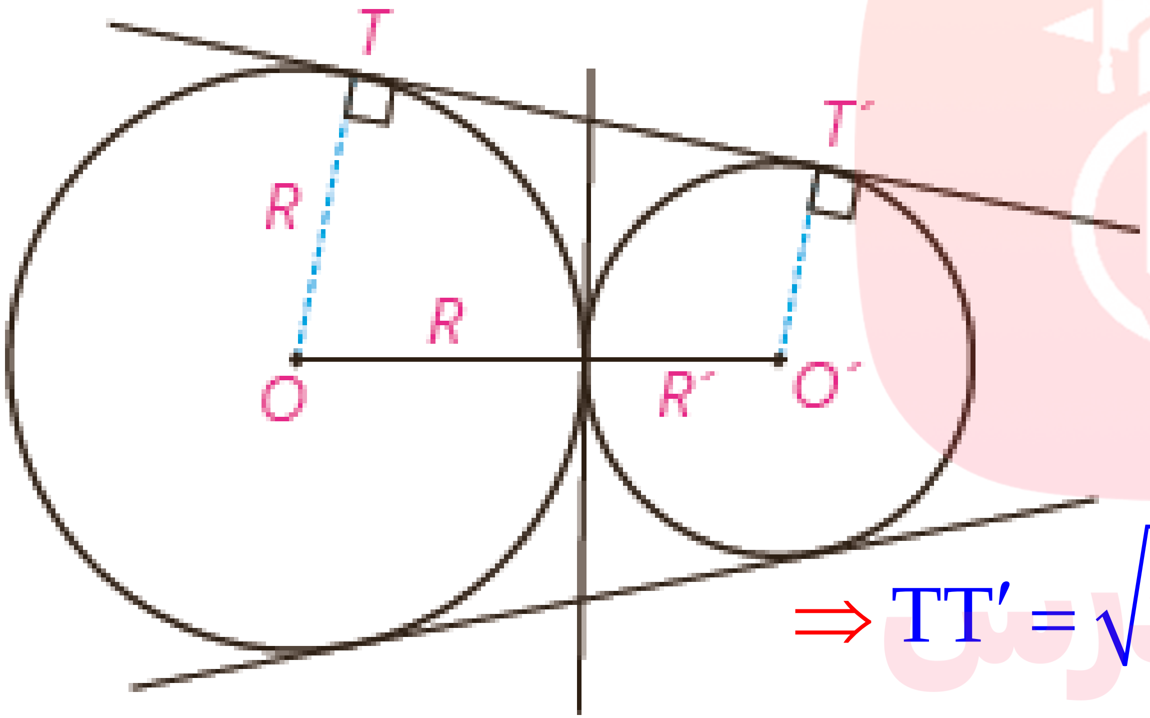
$$OO' = R + R'$$



مماس داخل‌اند؛
فقط یک مماس مشترک دارند.

$$OO' = |R - R'|$$

با استفاده از دستور محاسبهٔ طول مماس مشترک خارجی، نشان دهید در دو دایره مماس خارج، $TT' = ۲\sqrt{RR'}$



$$\Rightarrow TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲}$$

$$\Rightarrow TT' = \sqrt{(R + R')^۲ - (R - R')^۲}$$

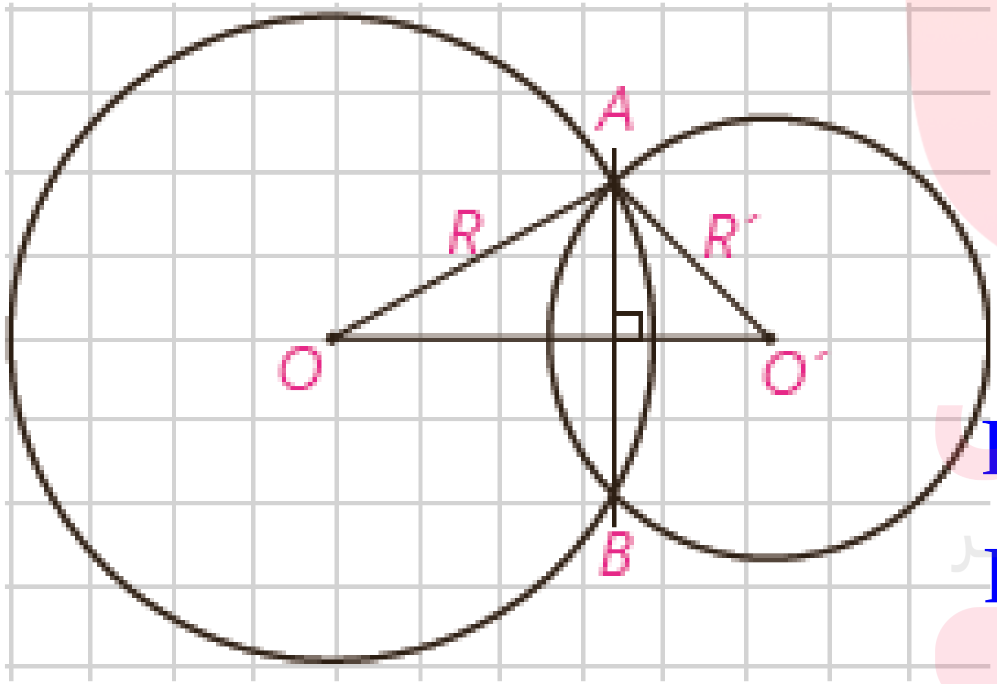
$$\Rightarrow TT' = \sqrt{(R^۲ + R'^۲ + ۲RR') - (R^۲ + R'^۲ - ۲RR')}$$

$$\Rightarrow TT' = \sqrt{۴RR'} = ۲\sqrt{RR'}$$

۴ــ دو دایره متقاطع. دو دایره را که دو نقطه مشترک داشته باشند، متقاطع می‌نامند.

در این حالت دو دایره، فقط دو مماس مشترک دارند.

و $R+R' > OO' > |R-R'|$ ؛ چرا؟



بنا به نامساوی مثلثی در مثلث OAO' داریم

$$OO' < R + R'$$

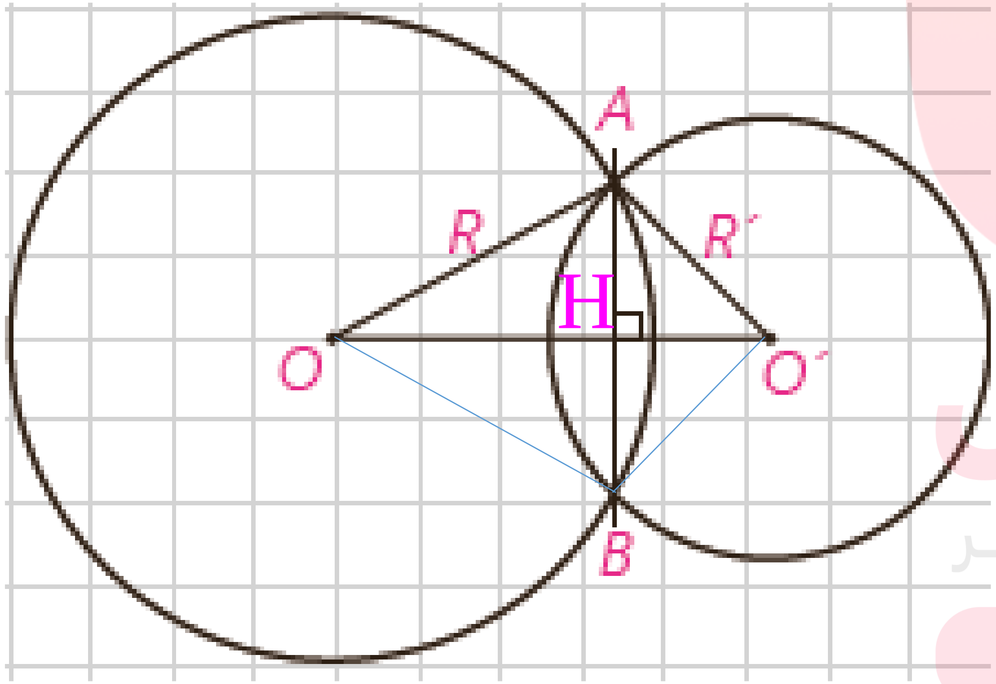
$$R < OO' + R' \Rightarrow R - R' < OO'$$

$$R' < OO' + R \Rightarrow R' - R < OO'$$

$$\Rightarrow |R - R'| < OO'$$

$$\Rightarrow |R - R'| < OO' < R + R'$$

پاره‌خط AB، که دوسر آن روی هر دو دایره است، وتر مشترک دو دایره متقاطع است. چرا پاره‌خط OO' عمودمنصف وتر مشترک AB است؟



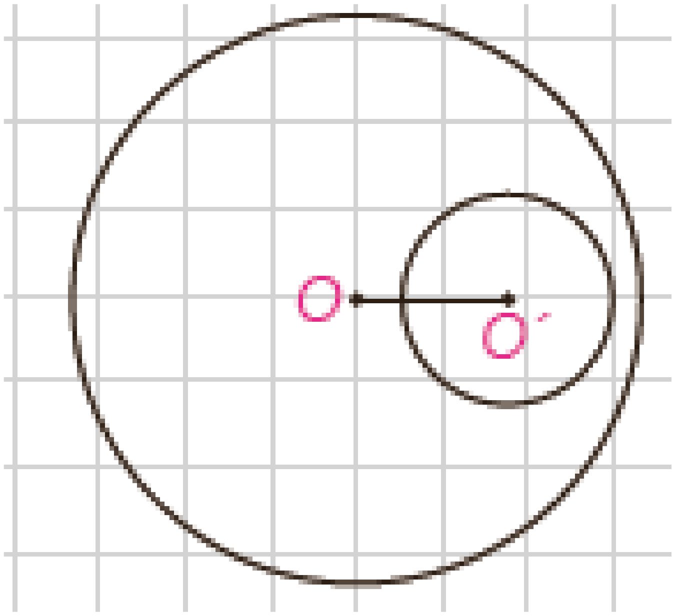
$$\left.\begin{array}{c} OO' = OO' \\ OA = OB = R \\ O'A = O'B = R' \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(ض ض ض)}} \overset{\triangle}{OAO'} \cong \overset{\triangle}{OBO'}$$

$$\xRightarrow{\text{تساوی اجزاءمتناظر}} \hat{O}_{۱} = \hat{O}_{۲}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} AH = BH \\ \hat{H}_{۱} = \hat{H}_{۲} = ۹۰^{\circ} \end{array}\right.$$

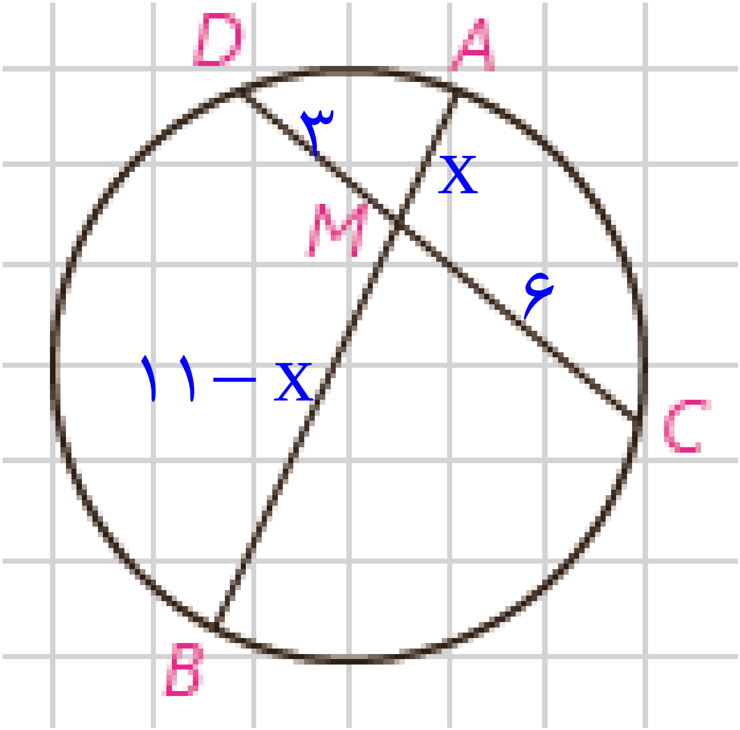
یعنی OO' عمود منصف AB است

۵ ــ دو دایره متداخل. دو دایره را که تمام نقاط یکی درون دیگری باشد، متداخل می‌نامیم. دو دایره متداخل هیچ مماس مشترک ندارند و در آنها $OO' < |R - R'|$



تمرین

۱ــ در دایرهٔ $C(O,R)$ وتر AB ، وتر CD به طول ۹ سانتی‌متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = ۱۱cm$، آن‌گاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند؟



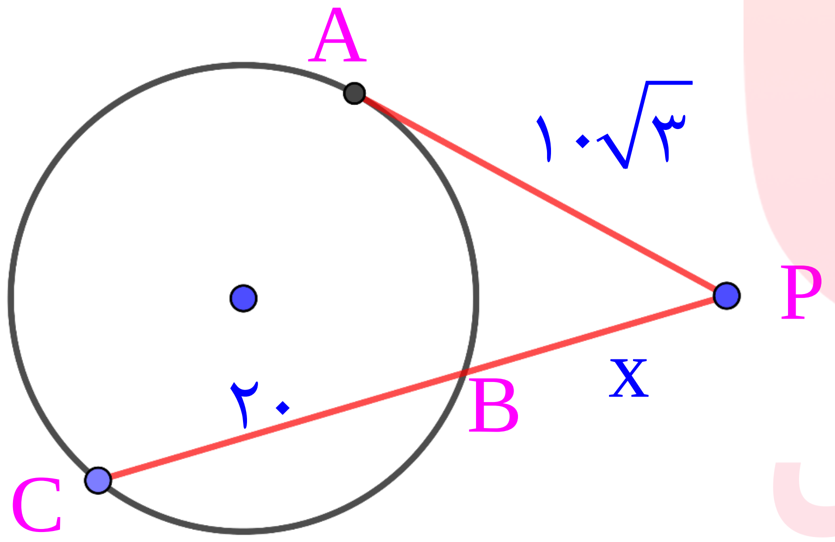
$$x(۱۱-x) = ۳\times۶ = ۱۸$$

$$\Rightarrow ۱۱x - x^{۲} - ۱۸ = ۰ \quad \Rightarrow x^{۲} - ۱۱x + ۱۸ = ۰$$

$$\Rightarrow (x-۹)(x-۲) = ۰ \quad \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = ۹ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AM = ۲ \\ BM = ۹ \end{cases} \Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{۲}{۹}$$

۲ـ از نقطهٔ P در خارج دایره‌ای، مماس PA به طول $۱۰\sqrt{۳}$ را بر آن رسم کرده‌ایم (A روی دایره است). همچنین خطی از P گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ B و C قطع کرده است و $BC = ۲۰$. طول‌های PB و PC را به‌دست آورید.



$$PA^۲ = PB.PC$$

$$\Rightarrow (۱۰\sqrt{۳})^۲ = x.(x+۲۰)$$

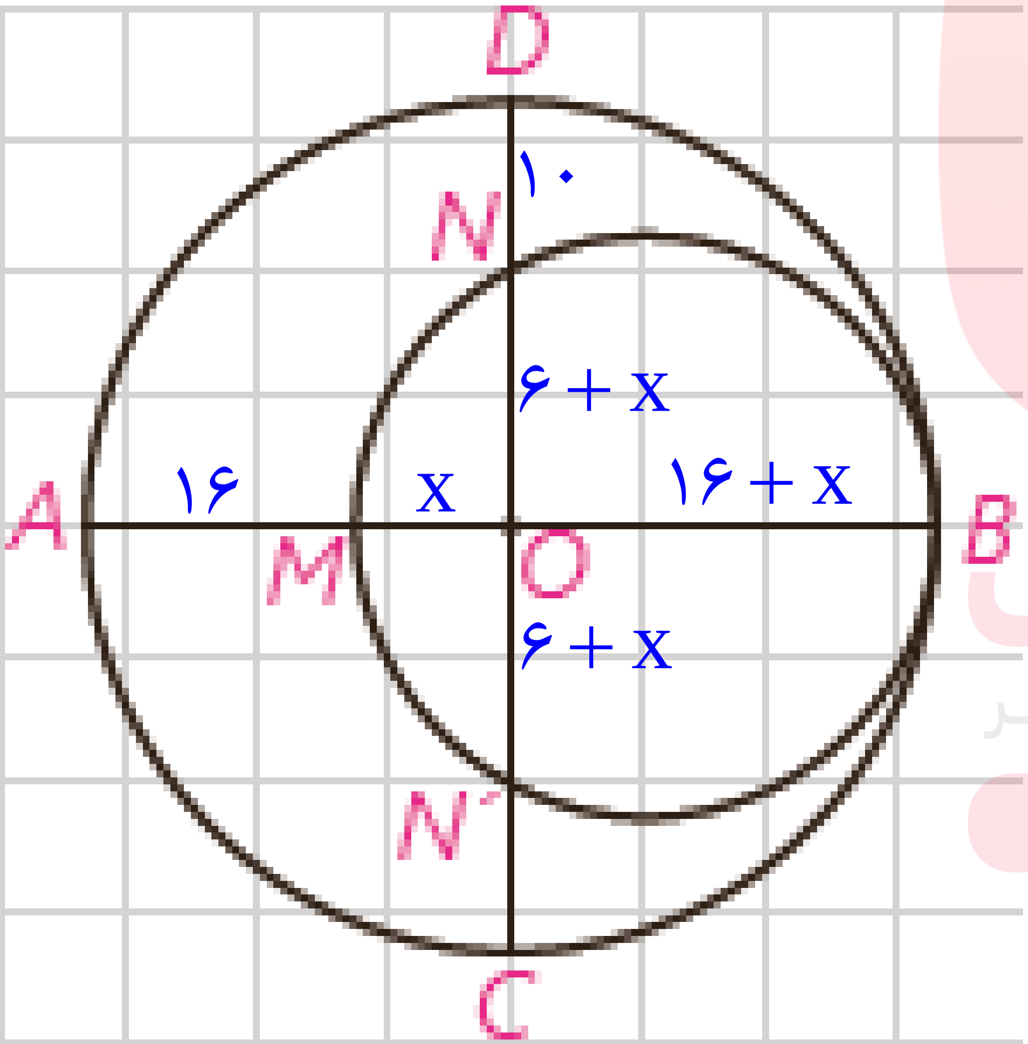
$$\Rightarrow ۳۰۰ = x^۲ + ۲۰x$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۲۰x - ۳۰۰ = ۰$$

$$\Rightarrow (x+۳۰)(x-۱۰) = ۰ \quad \Rightarrow x = ۱۰$$

$$\Rightarrow PB = ۱۰ \quad , \quad PC = ۳۰$$

۳ــ در شکل مقابل، دو دایره برهم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ‌تر برهم عمودند. اگر ۱۶ = AM و ۱۰ = ND، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید.



$$(۶+x)^۲ = x(۱۶+x)$$

$$\Rightarrow ۳۶ + x^۲ + ۱۲x = ۱۶x + x^۲$$

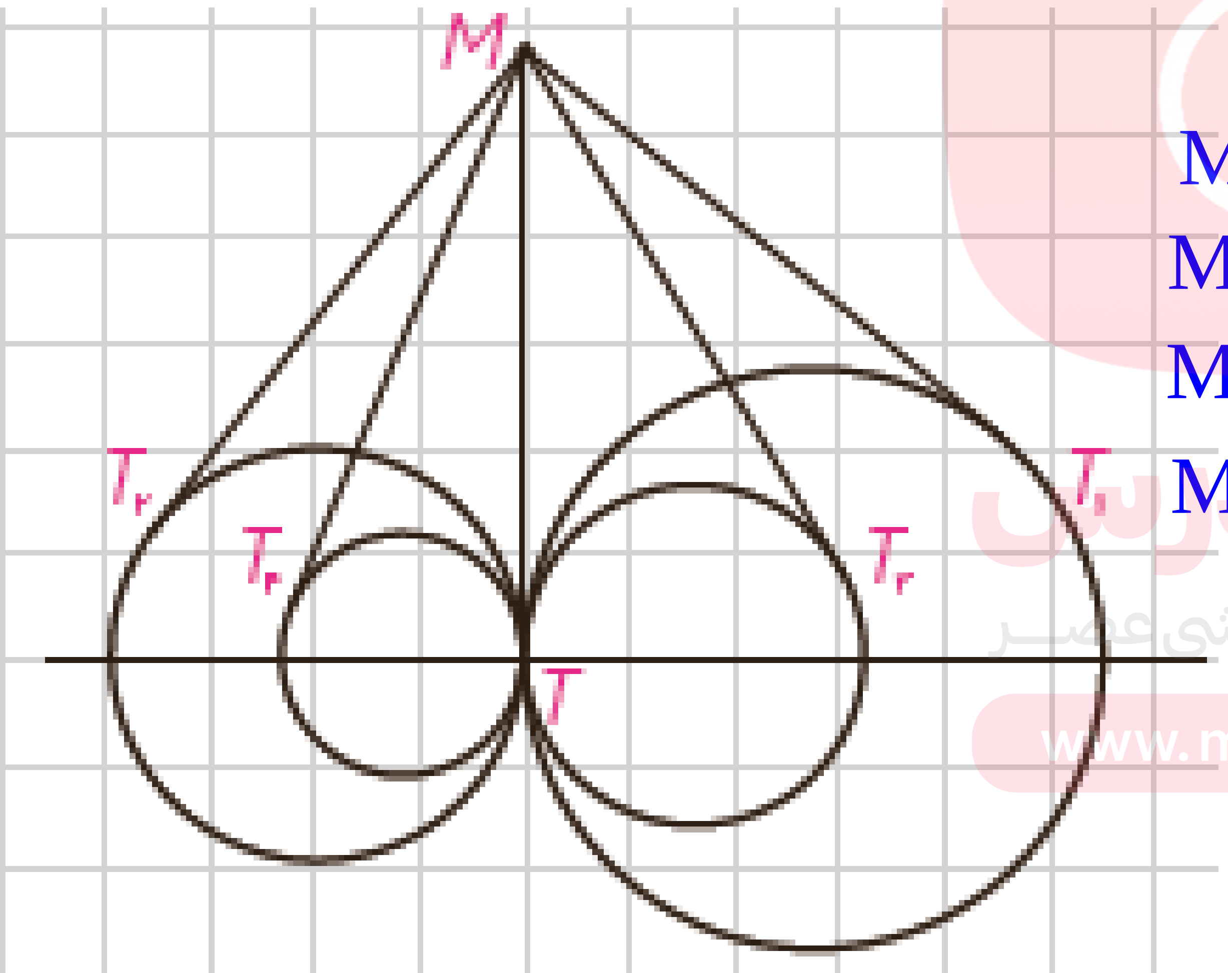
$$\Rightarrow ۳۶ = ۴x$$

$$\Rightarrow x = ۹$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = ۱۷ \\ R = ۲۵ \end{cases}$$

۴ــ مطابق شکل مقابل، تمام دایره‌ها در نقطه T برهم مماس‌اند و از نقطه M روی مماس مشترک آنها بر دایره‌ها مماس رسم کرده‌ایم؛ ثابت کنید

$$MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4 = \dots$$



چون مماسهای رسم شده بر دایره از یک نقطه با هم برابرند در نتیجه

$$\left.\begin{array}{l} MT = MT_1 \\ MT = MT_2 \\ MT = MT_3 \\ MT = MT_4 \\ \quad \vdots \end{array}\right\} \Rightarrow MT_1 = MT_2 = MT_3 = \dots$$

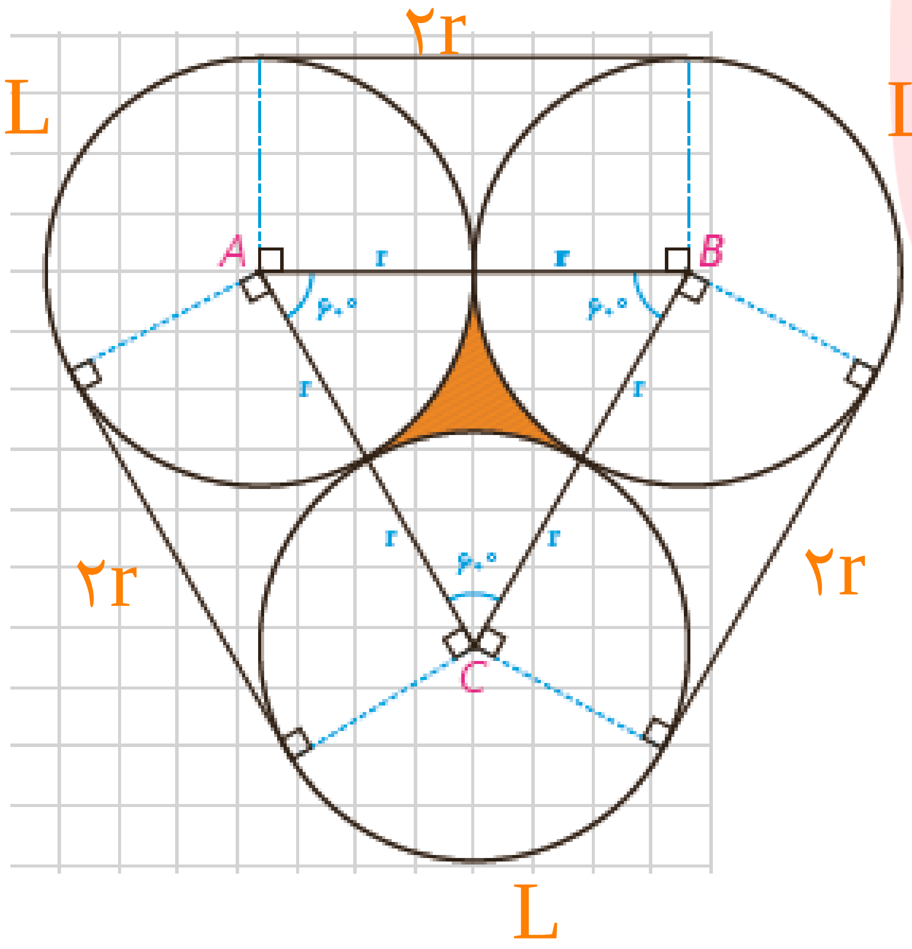
۵ــ طول شعاع‌های دو دایرهٔ متخارج را به‌دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $۳\sqrt{۷}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{۱۵}$ و طول خط‌المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است.

$$\sqrt{d^{۲}-(R-R')^{۲}}=۳\sqrt{۷}\Rightarrow ۶۴-(R-R')^{۲}=۶۳\Rightarrow R-R'=۱$$

$$\sqrt{d^{۲}-(R+R')^{۲}}=\sqrt{۱۵}\Rightarrow ۶۴-(R+R')^{۲}=۱۵\Rightarrow R+R'=۷$$

$$\Rightarrow\begin{cases}R=۴\\R'=۳\end{cases}$$

۶ــ سه دایره به شعاع‌های برابر r دو به دو برهم مماس‌اند. مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیلهٔ نخی بسته شده‌اند. نشان دهید طول این نخ برابر $۶r + ۲\pi r$ است. همچنین نشان دهید مساحت ناحیه محدود به سه دایره برابر $r^۲(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۲})$ است.



$$L = \frac{۱}{۳}(۲\pi r) = \frac{۲\pi}{۳}r$$

طول نخ $= ۲r \times ۳ + ۳L = ۶r + ۲\pi r$

مساحت رنگی $= \frac{۱}{۲} \times ۲r \times ۲r \times \sin ۶۰^\circ - ۳ \times \frac{۱}{۶} \times \pi r^۲$

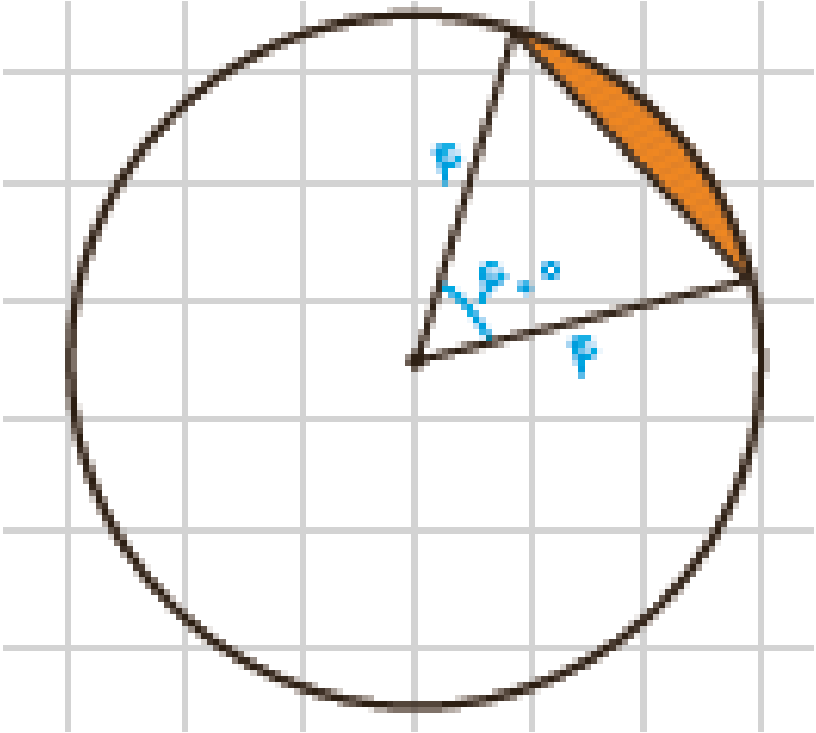
$$= \sqrt{۳}r^۲ - \frac{\pi}{۲}r^۲ = r^۲(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۲})$$

۷ــ طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ مماس درونی ۲ سانتی‌متر و مساحت ناحیهٔ محدود بین آنها ۱۶π سانتی‌مترمربع است. طول شعاع‌های دو دایره را به‌دست آورید.

$$\pi R^{۲} - \pi R'^{۲} = ۱۶\pi \Rightarrow R^{۲} - R'^{۲} = ۱۶ \Rightarrow (R - R')(R + R') = ۱۶$$

$$d = R - R' = ۲ \Rightarrow \begin{cases} R - R' = ۲ \\ R + R' = ۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = ۵ \\ R' = ۳ \end{cases}$$

۸ــ مطابق شکل دایره به شعاع ۴، مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.



مثلث $S=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۴\times \sin ۶۰^\circ=\frac{۸\sqrt{۳}}{۲}=۴\sqrt{۳}$

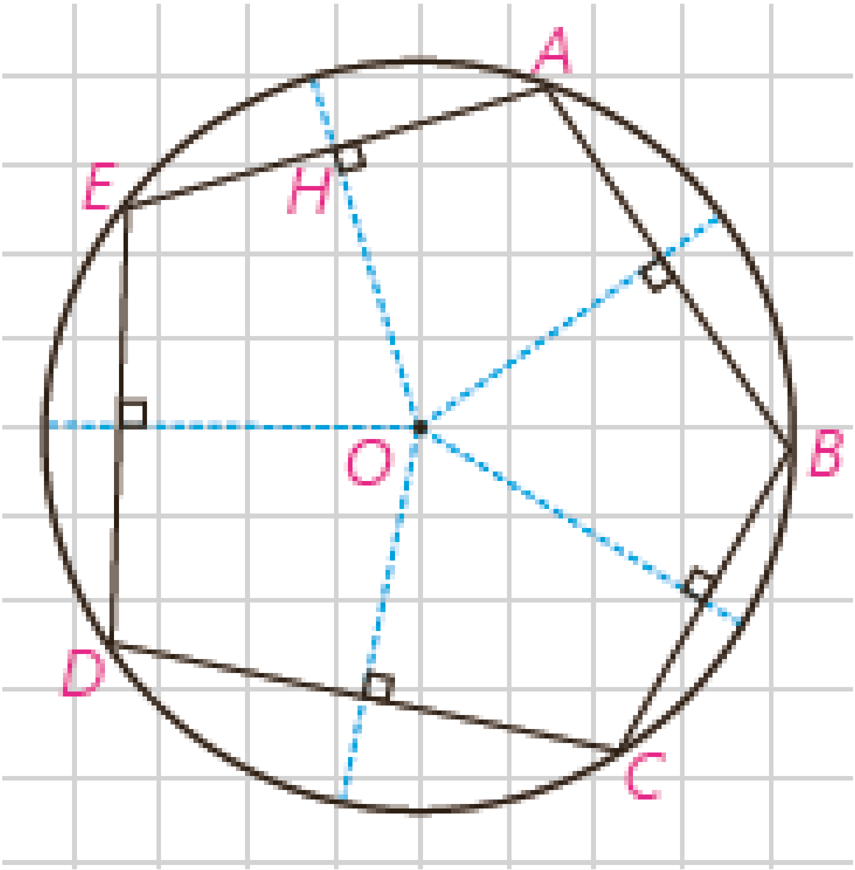
قطاع $S=\frac{۱}{۶}\times \pi\times ۴^۲=\frac{۸\pi}{۳}$

قطعه $S=\frac{۸\pi}{۳}-۴\sqrt{۳}$

درس سوم

چند ضلعی‌های محاطی و محیطی

چند ضلعی را محاطی می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که از همه رئوس آن بگذرد؛ در این صورت دایره را دایرهٔ محیطی آن چند ضلعی می‌نامیم.



به‌طور مثال ABCDE یک پنج ضلعی محاطی است.

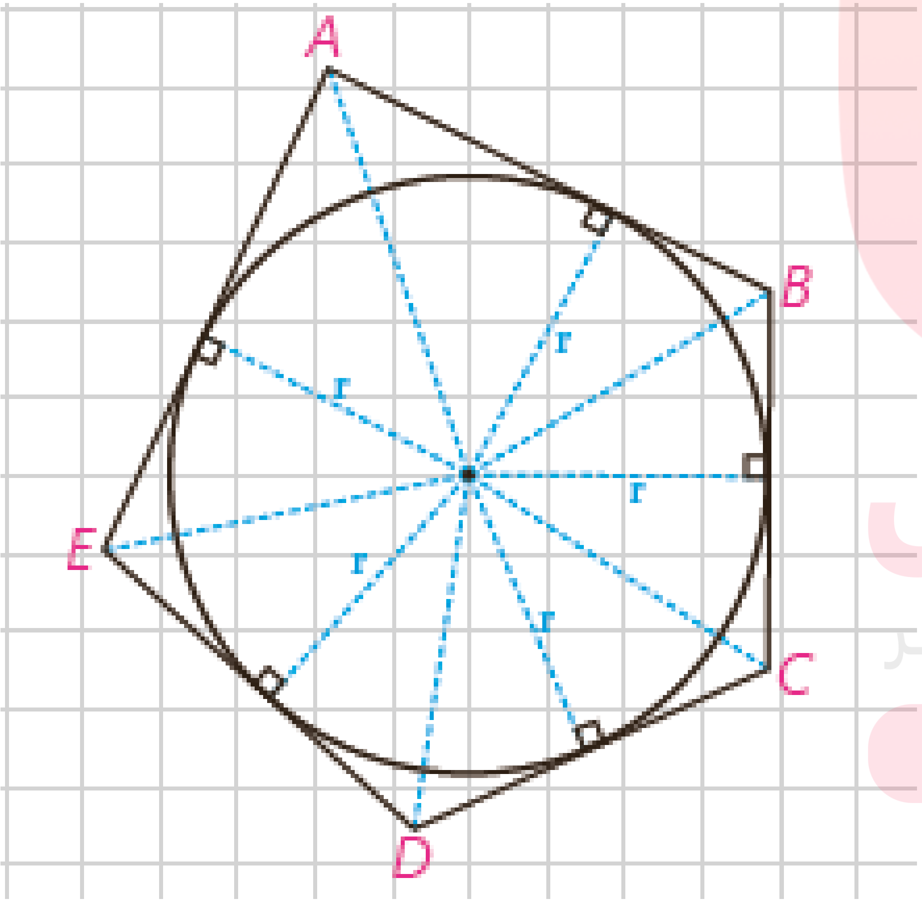
می‌دانیم برای اینکه دایره‌ای از دو نقطه بگذرد، باید مرکز آن روی عمود منصف پاره‌خطی باشد که آن دو نقطه دو سر آن است؛ بنابراین :

یک چند ضلعی، محاطی است اگر و فقط اگر عمود منصف‌های همه ضلع‌های آن در یک نقطه همرس باشند.

این نقطه مرکز دایره محیطی چند ضلعی است. چرا؟

چون از تمام رأس ها به یک فاصله است

چند ضلعی را محیطی می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که بر همهٔ ضلع‌های آن مماس باشد؛ در این صورت دایره را دایرهٔ محاطی این چند ضلعی می‌نامیم.

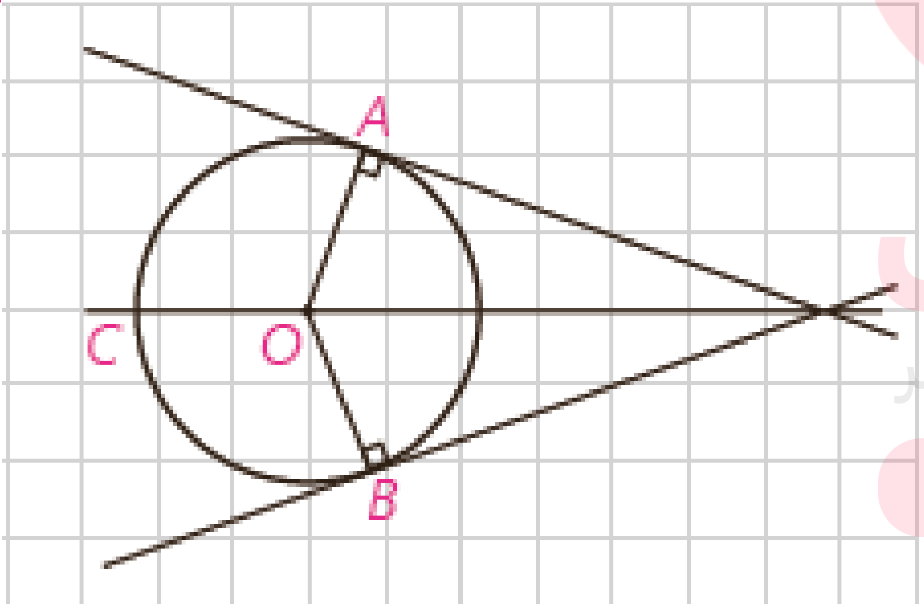


فعالیت

فرض کنید دایرهٔ C بر دو ضلع زاویه‌ای مانند شکل مماس باشد.

الف)

۱ــ پاره خط‌هایی که مرکز دایره را به نقاط تماس اضلاع با دایره وصل می‌کنند، رسم کنید و آنها را OB و OA بنامید.



۲ــ پاره خط‌های OA و OB برای دایره چه نوع پاره خطی هستند؟

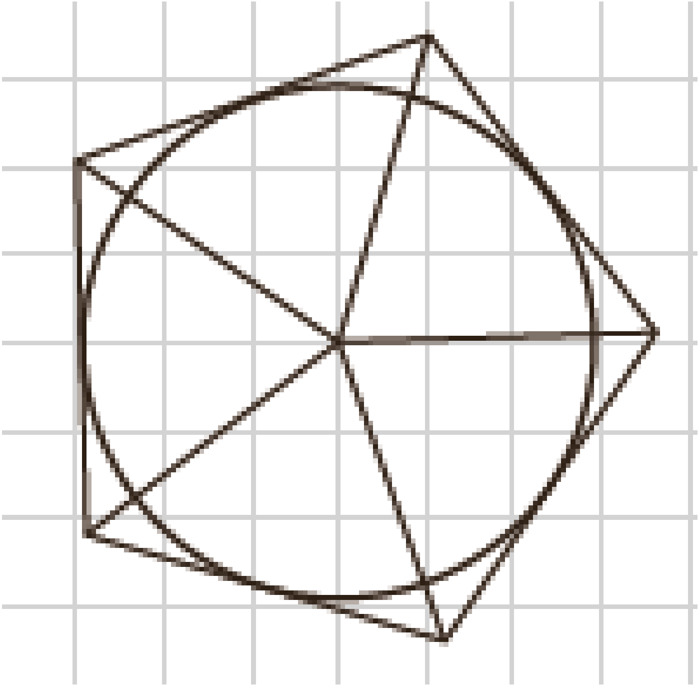
شعاع

۳ـ فاصلهٔ نقطهٔ O (مرکز دایره) تا ضلع‌های زاویه مفروض با طول پاره خط‌های رسم شده (OA و OB) چه رابطه‌ای دارد؟ برابرند

چون فاصله نقطه تا خط ، همان طول عمودی است که از نقطه بر خط وارد شده است.

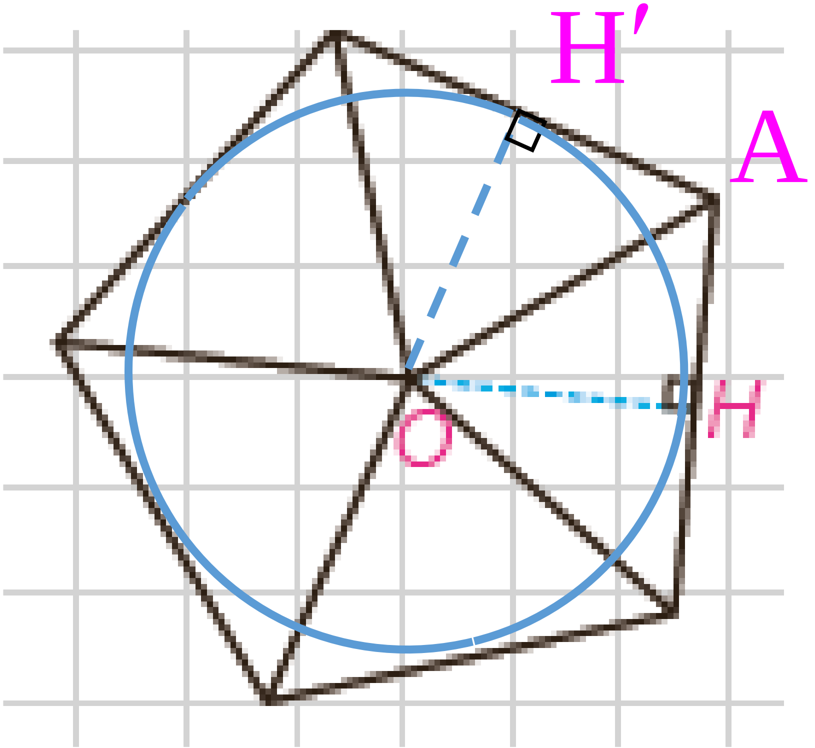
۴ـ با توجه به (۲) و (۳) فاصلهٔ مرکز دایره از دو ضلع زاویه برابر است........ و بنابراین نقطهٔ O روی نیمساز زاویه است

۵ــ فرض کنید مانند شکل مقابل، دایره در یک چند ضلعی محاط شده باشد. چرا مرکز دایره، محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی چند ضلعی است؟



چون از اضلاع تمام زاویه ها به یک فاصله است، پس روی نیمساز تمام زاویه ها است به عبارتی نیمساز زاویه ها همگی در مرکز دایره همرسند

ب) فرض کنید یک چند ضلعی مانند شکل مقابل به گونه‌ای باشد که نیمسازهای زوایای داخلی آن در نقطهٔ O یکدیگر را قطع کرده باشند و OH پاره خط عمود به یک ضلع چند ضلعی باشد. دایره‌ای به مرکز O و شعاع OH برای چند ضلعی مفروض چه نوع دایره‌ای است؟ چرا؟ دایره محاطی



یک زاویه را به دلخواه انتخاب می کنیم مثلاً A در اینصورت O روی نیمساز زاویه A است درنتیجه

$$OH = OH'$$

یعنی دایره به شعاع OH بر دو ضلع زاویه A مماس است

چون زاویه A دلخواه بود در نتیجه برای تمام زاویه ها چنین است

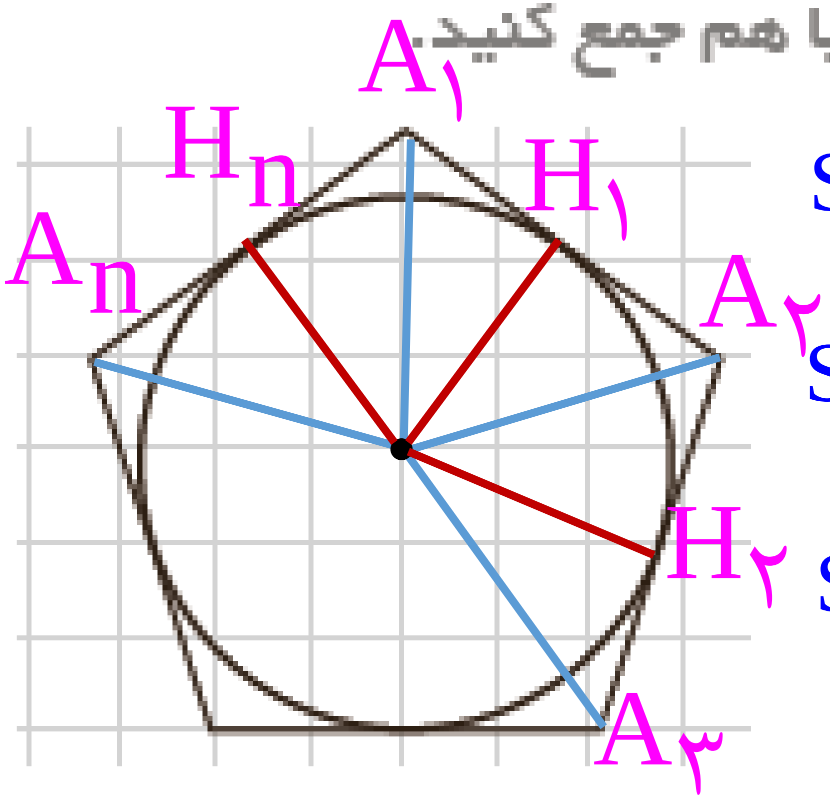
یعنی دایره رسم شده بر تمام اضلاع چند ضلعی مماس است

بنابراین؛ یک چند ضلعی، محیطی است اگر و فقط اگر همه نیمسازهای زاویه‌های آن در یک نقطه همرس باشند.این نقطه مرکز دایره محاطی چند ضلعی است.

کاردرکلاس

اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط ۲P شعاع دایره محاطی برابر r باشد، نشان دهید S=rp .

راهنمایی: کافی است مساحت n مثلث را محاسبه، و با هم جمع کنید.



$$S = S_{OA_۱A_۲} + S_{OA_۲A_۳} + \ldots + S_{OA_nA_۱}$$

$$S = \frac{۱}{۲}r.A_۱A_۲ + \frac{۱}{۲}r.A_۲A_۳ + \ldots + \frac{۱}{۲}r.A_nA_۱$$

$$S = \frac{۱}{۲}r(A_۱A_۲ + A_۲A_۳ + \ldots + A_nA_۱)$$

$$S = \frac{۱}{۲}r(۲P) \Rightarrow \quad S = rP$$

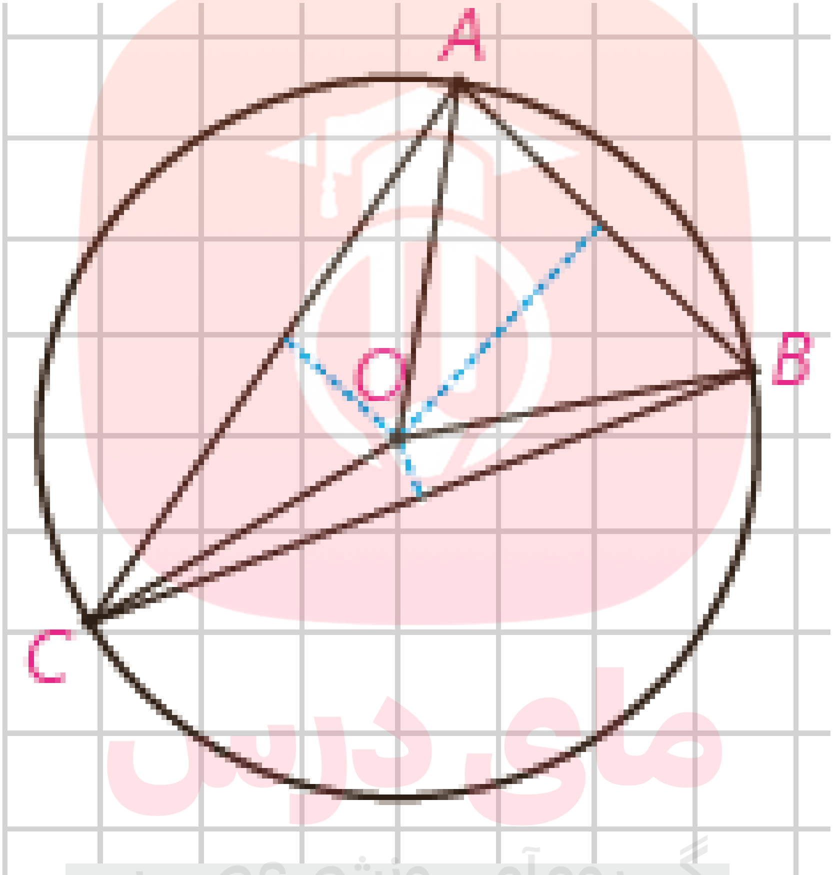
دایره‌های محیطی و محاطی مثلث

قبلاً همرسی سه عمود منصف یک مثلث را ثابت کرده‌ایم؛

بنابراین نقطه همرسی سه عمود منصف مثلث، تنها نقطه‌ای است که از سه رأس یک مثلث به یک فاصله است.

پس اگر دایره‌ای به مرکز نقطه تلاقی سه عمود منصف و به شعاع فاصله این نقطه تا یک رأس رسم کنیم، این دایره از هر سه رأس مثلث می‌گذرد؛ یعنی دایره محیطی مثلث است.

در نتیجه مثلث همواره محاطی است.

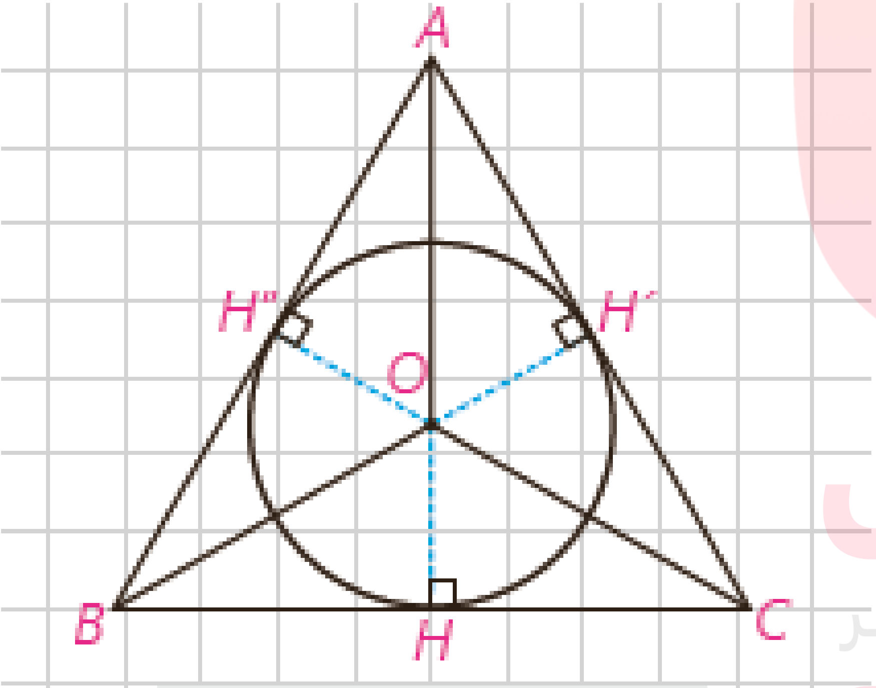


OA=OB=OC=R

همچنین ثابت کرده‌ایم سه نیمساز زاویه‌های داخلی مثلث در نقطه‌ای درون مثلث همرس‌اند. در نتیجه مثلث، محیطی نیز هست. بنابر ویژگی نیمساز، این نقطه از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

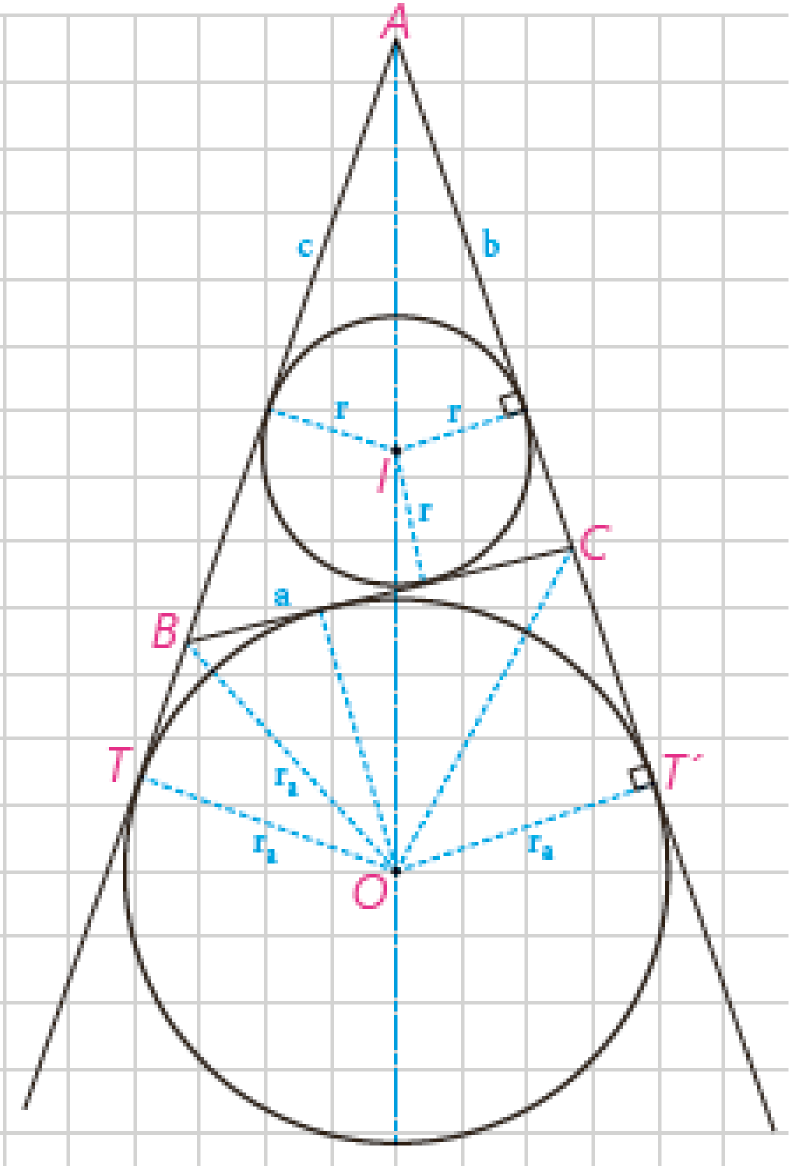
پس مرکز دایره محاطی مثلث نقطه همرسی سه نیمساز است و شعاع این دایره، که آن را با r نشان می‌دهیم، فاصله این نقطه از هر یک از سه ضلع است.

بنابر آنچه در مورد n ضلعی‌های محیطی نشان دادیم در مثلث نیز $S=pr$ که S مساحت و P نصف محیط مثلث است.



$OH=OH'=OH''=r$

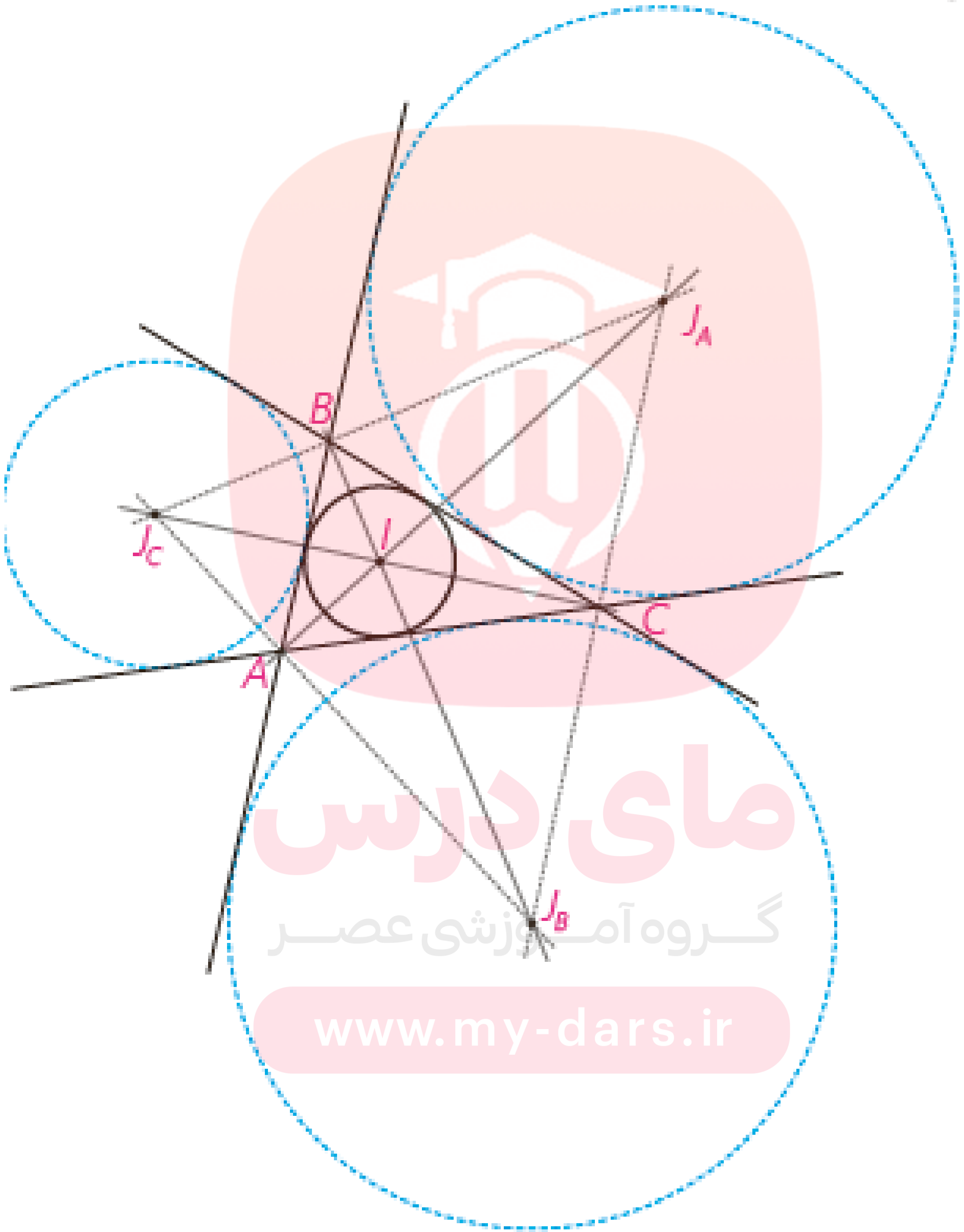
اگر نیمساز زاویه A از Δ ABC را رسم کنیم، نیمساز زاویه خارجی C را در نقطه‌ای مانند O قطع می‌کند. این نقطه از خط BC و خط‌های AC و AB به یک فاصله است؛ چرا؟



چون روی نیمساز زاویه ی خارجی B و خارجی C و داخلی A قرار دارد پس از اضلاع این زاویه ها به یک فاصله است

بنابراین O نیز مرکز دایره‌ای است که بر ضلع BC و خط‌های شامل دو ضلع دیگر مماس است. این دایره را دایره محاطی خارجی نظیر رأس A می‌نامند.

شعاع این دایره را با r_a نشان می‌دهند؛ به همین ترتیب دو دایره محاطی خارجی دیگر نظیر دو رأس B و C وجود دارد.



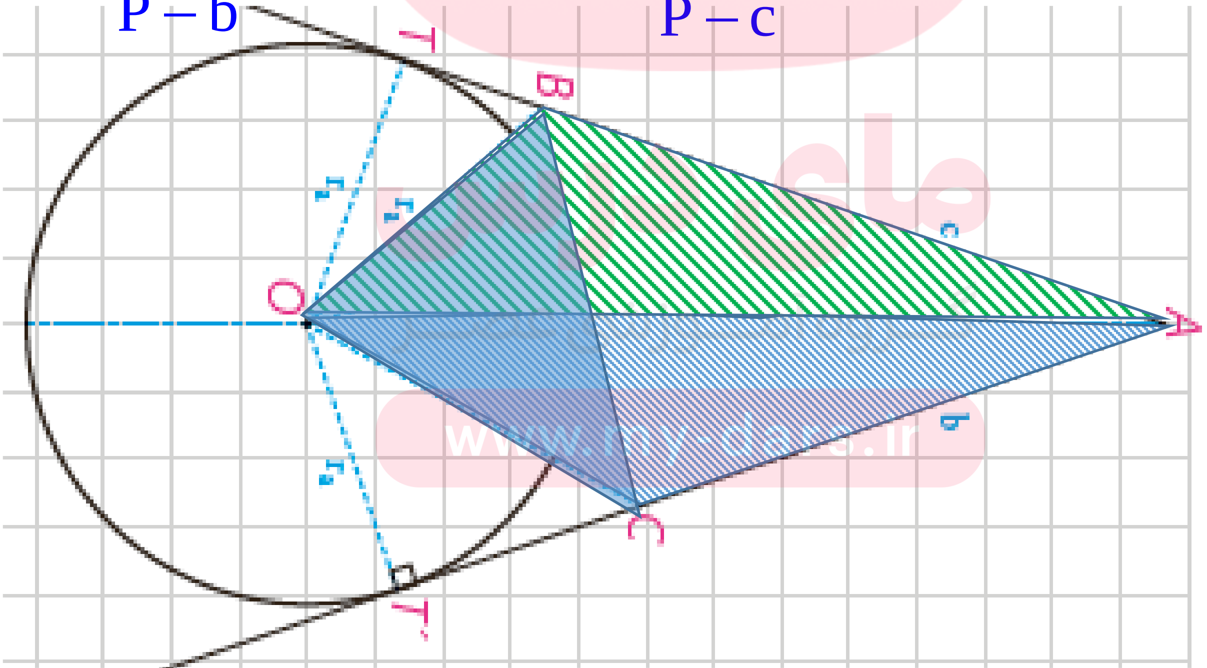
B
J_A
J_C
I
C
A
J_B

اکنون در فعالیت زیر محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محاطی خارجی را بررسی می‌کنیم.

فعالیت

در شکل داریم: $S(ABC)=S(OAC)+S(OAB)-S(OBC)$ اگر مساحت ΔABC را به S نشان دهیم، $S=\frac{1}{2}r_a(b+c-a)$. اگر محیط مثلث را با ۲p نشان دهیم، داریم، $2p=a+b+c$؛ پس $2p-2a=b+c-a$؛ در نتیجه $S=r_a(P-a)$ و بنابراین $r_a=\frac{S}{p-a}$ به طور مشابه برای اضلاع دیگر داریم:

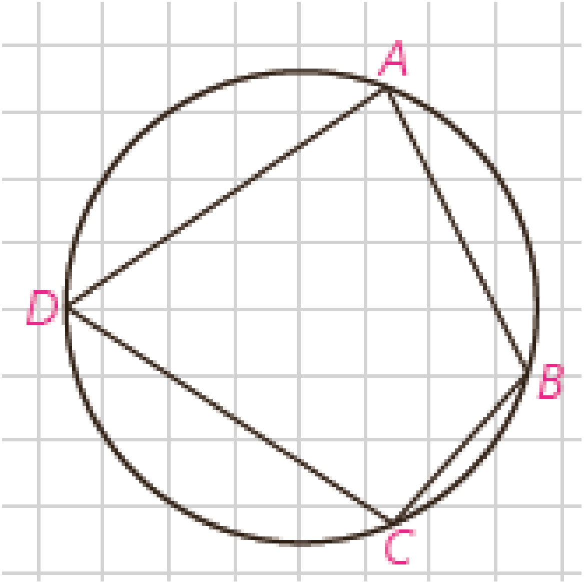
$r_b=\frac{S}{P-b}$ $\qquad$ $r_c=\frac{S}{P-c}$



چهار ضلعی‌های محاطی و محیطی

قضیه: یک چهار ضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر دو زاویهٔ مقابل آن مکمل باشند.

اثبات



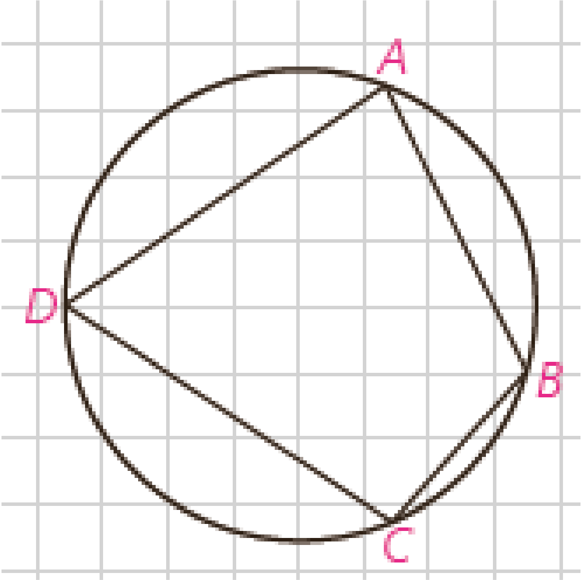
۱ــ فرض کنیم چهار ضلعی ABCD محاطی باشد؛

مجموع اندازه‌های $\widehat{A}$, $\widehat{C}$ نصف مجموع اندازه‌های کمان‌های DCB و DAB است؛

اما مجموع اندازه‌های این دو کمان ...۳۶۰°... است

در نتیجه مجموع اندازه‌های $\widehat{A}$, $\widehat{C}$ برابر ...۱۸۰°... است.

به همین ترتیب $\widehat{B}$, $\widehat{D}$ مکمل‌اند.

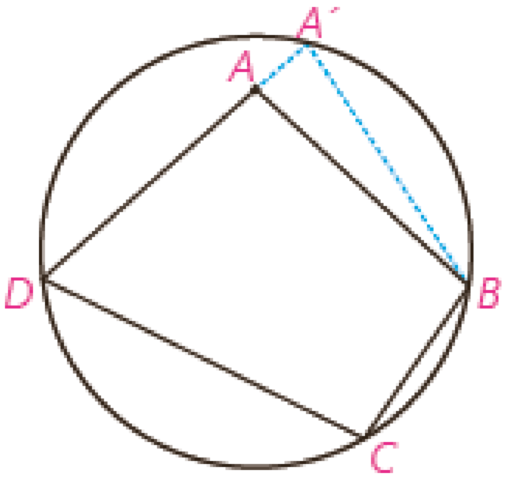


۲ـ فرض کنیم $\hat{A}$, $\hat{C}$ مکمل باشند.

با برهان خلف ثابت می‌کنیم چهارضلعی ABCD محاطی است.

از سه نقطه C،B و D همواره یک دایره می‌گذرد؛ چرا؟

چون از هرسه نقطه ی غیر واقع بر یک خط دقیقا یک مثلث می گذرد

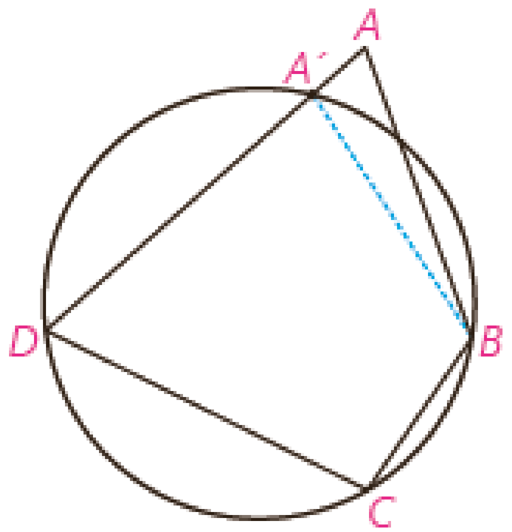


اگر این دایره از A نگذرد، خط AD را در نقطه ای دیگری مانند A' قطع می کند

که A' بین A و Dیا A بین A و D است.

اکنون چهارضلعی A’BCDمحاطی است؛

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \\ \hat{A}'+\hat{C}=۱۸۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}=\hat{A}'$$

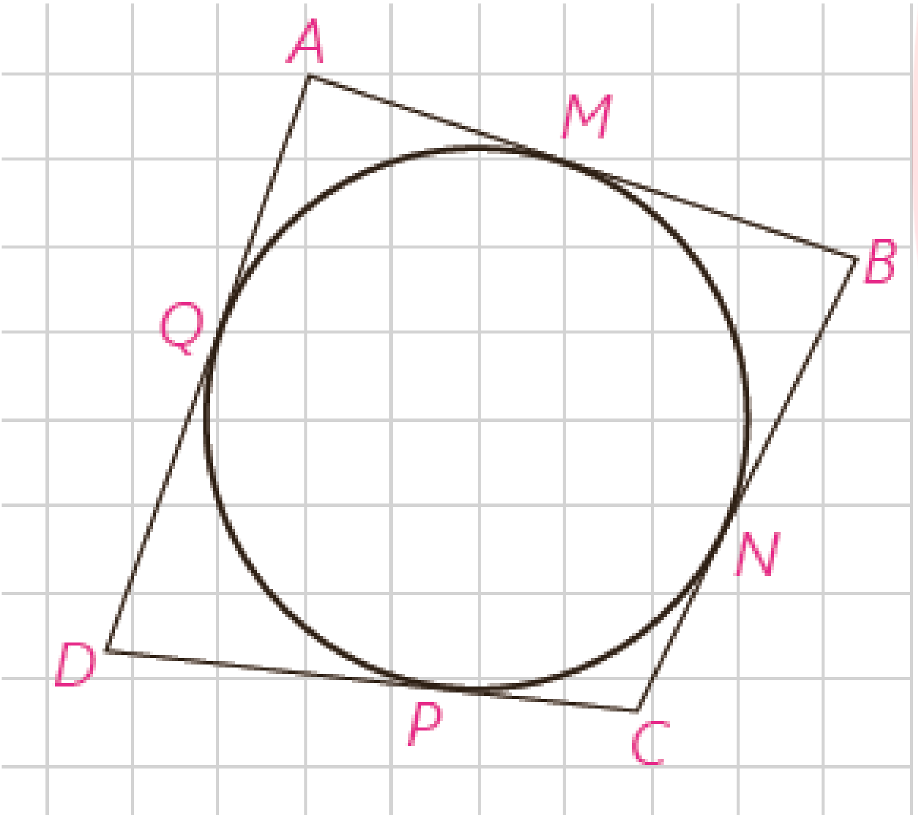


این ممکن نیست

چون در یک مثلث زاویه داخلی و خارجی نمی توانند با هم برابر باشند

در نتیجه A' همان A است.

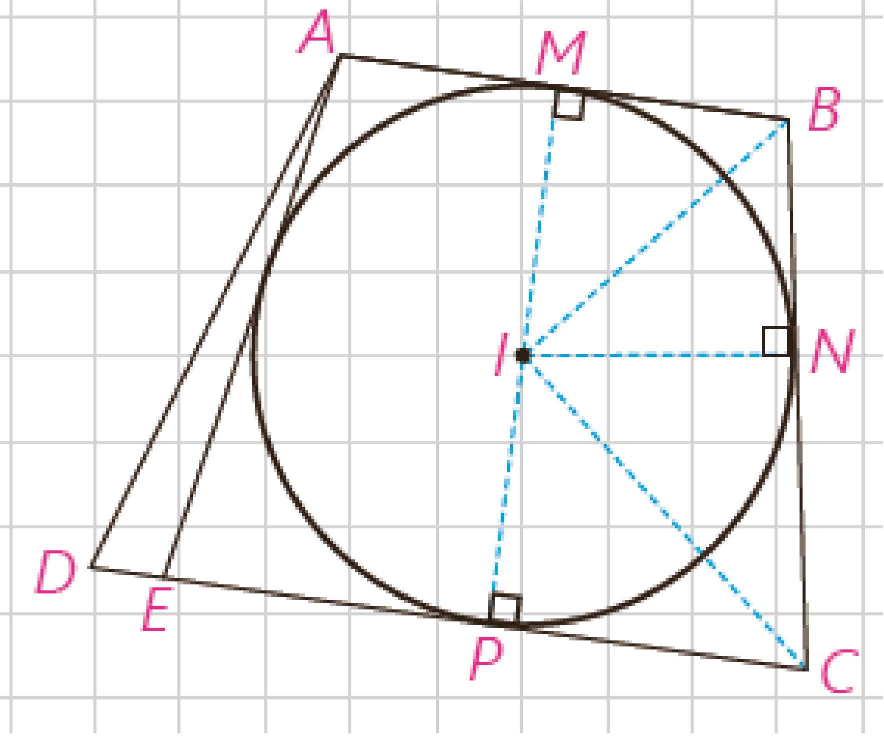
قضیه: یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر باشند.



اثبات

۱ــ اگر چهارضلعی ABCD محیطی باشد،

$$AB + CD = AM + BM + PC + DP = AQ + QD + CN + NB = AD + BC$$



۲- فرض کنید: $AB + CD = BC + AD$.

نیمسازهای دو زاویه B و C همدیگر را در نقطه ای مانند قطع می کنند. با توجه به ویژگی نیمساز، نقطه I از سه ضلع CD و BC و AB به یک فاصله است.($IN = IP = IM$)

پس دایره ای به مرکز I و شعاع IM بر AB و BC و CD مماس است

حال اگر این دایره بر AD هم مماس باشد، حکم ثابت شده است.

اما اگر این دایره بر AD مماس نباشد از A بر آن مماسی رسم می کنیم تا خط CD را در نقطه ای مانند E قطع کند؛ در این صورت E بین P و D یا D بین E و P واقع می شود. پس، $EC+AB = AE + BC$ ؛

از این رابطه با استفاده از رابطه فرض نتیجه می گیرید : $DE + AE = AD$

این رابطه امکان ندارد چون با قضیه نامساوی مثلث در تناقض است

پس E همان D است و دایره بر ضلع AD نیز مماس است.

کاردرکلاس

جدول زیر را کامل کنید.

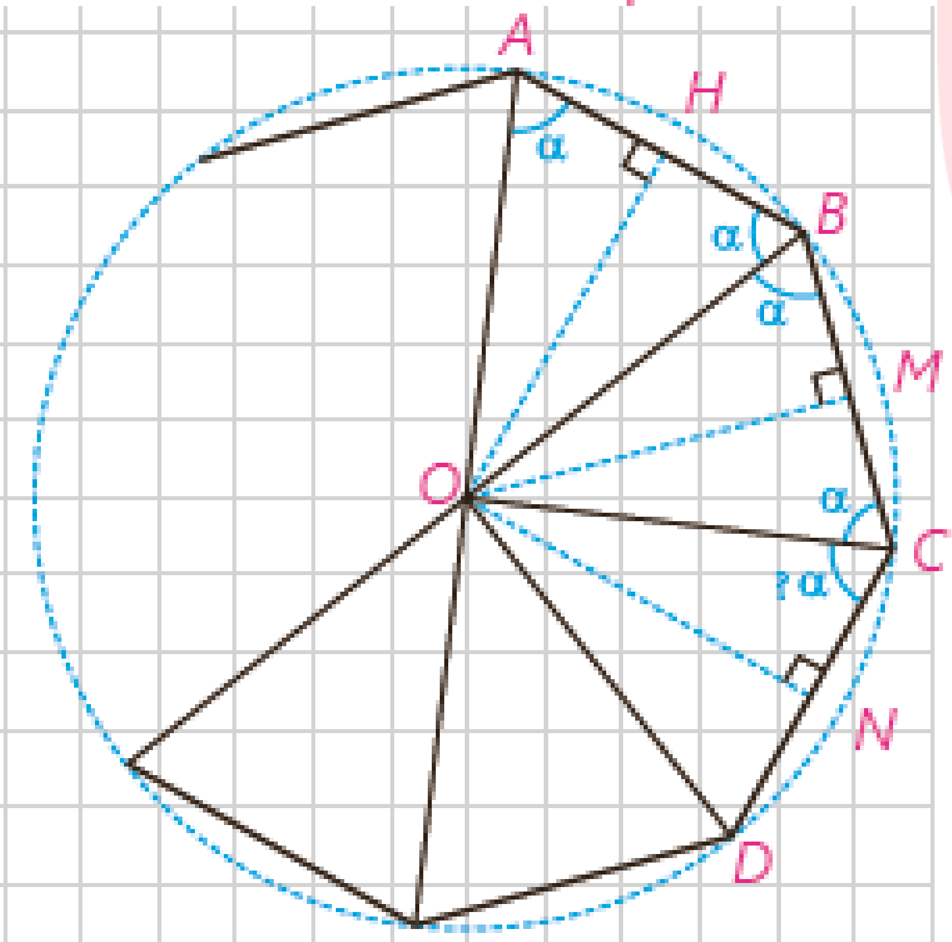
	مربع	مستطیل	لوزی	متوازی‌الاضلاع	ذوزنقه	ذوزنقه متساوی‌الساقین	کایت
محاطی	✓	✓	×	×	×	✓	×
محیطی	✓	×	✓	×	×	×	✓

یک چند ضلعی محدب را منتظم می‌نامند، هرگاه تمام ضلع‌های آن هم‌اندازه و تمام زاویه‌های آن نیز هم‌اندازه باشند.

مثلث متساوی‌الاضلاع سه ضلعی منتظم و مربع چهارضلعی منتظم است.

فعالیت

فرض کنید اندازه هر زاویه n ضلعی منتظم ...ABCD، 2α باشد؛ عمود منصف‌های دو ضلع AB و BC را رسم می کنیم. فرض کنیم در O متقاطع‌اند. بنابراین $OA=OB=OC$.

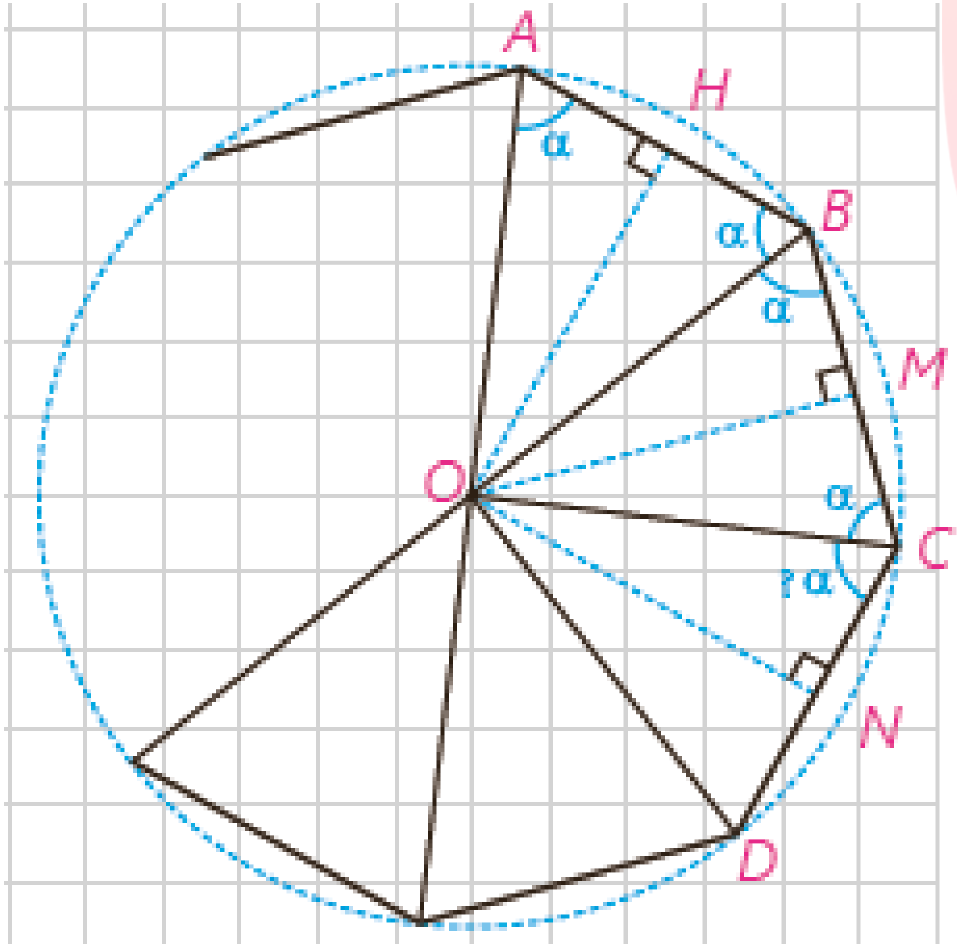


$$\left.\begin{array}{l} OA = OC \\ OB = OB \\ AB = BC \end{array}\right\} \overset{(\text{ض ض ض})}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{COB}$$

$$O\hat{A}B = O\hat{B}A = O\hat{B}C = O\hat{C}B = \alpha$$

اکنون از D به O وصل می کنیم

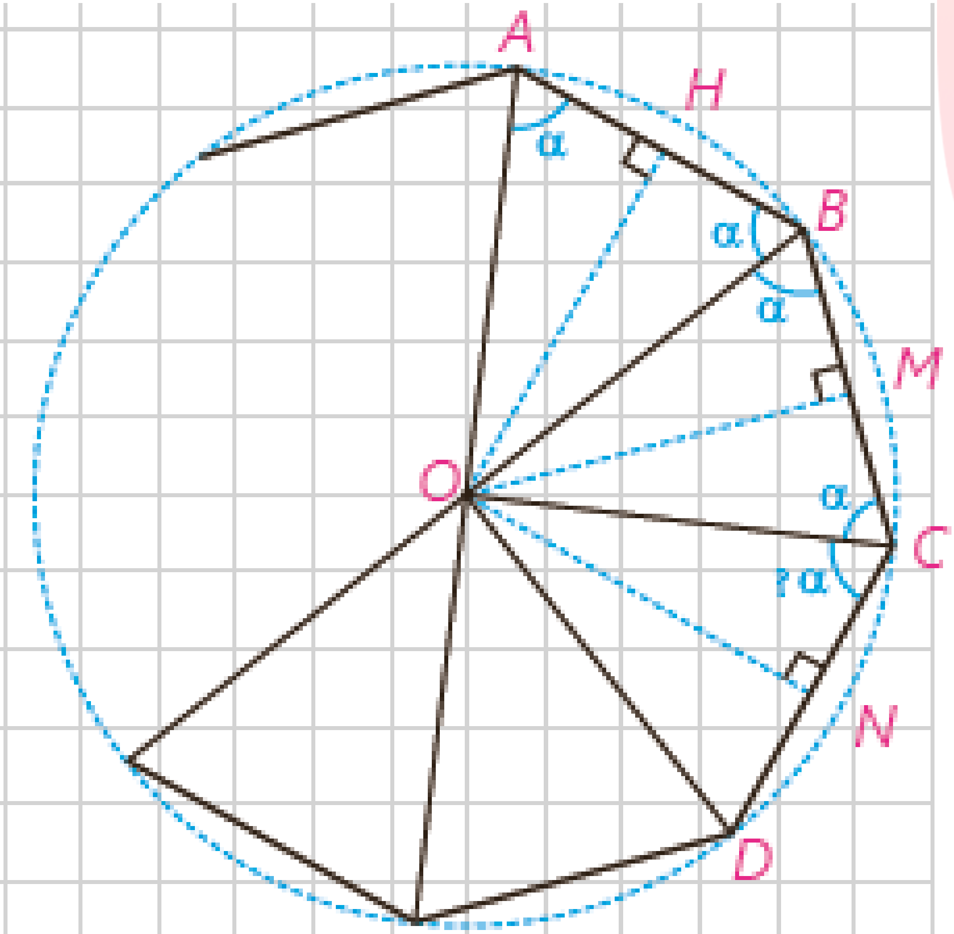
چون تمام زاویه های چند ضلعی ۲α است پس



$$\left.\begin{array}{l} B\hat{C}D = ۲\alpha \\ B\hat{C}O = \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow O\hat{C}D = \alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} O\hat{C}D = O\hat{C}B = \alpha \\ OC = OC \\ OB = OD \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{OCD} \cong \overset{\Delta}{OBC}$$

(ض ز ض)



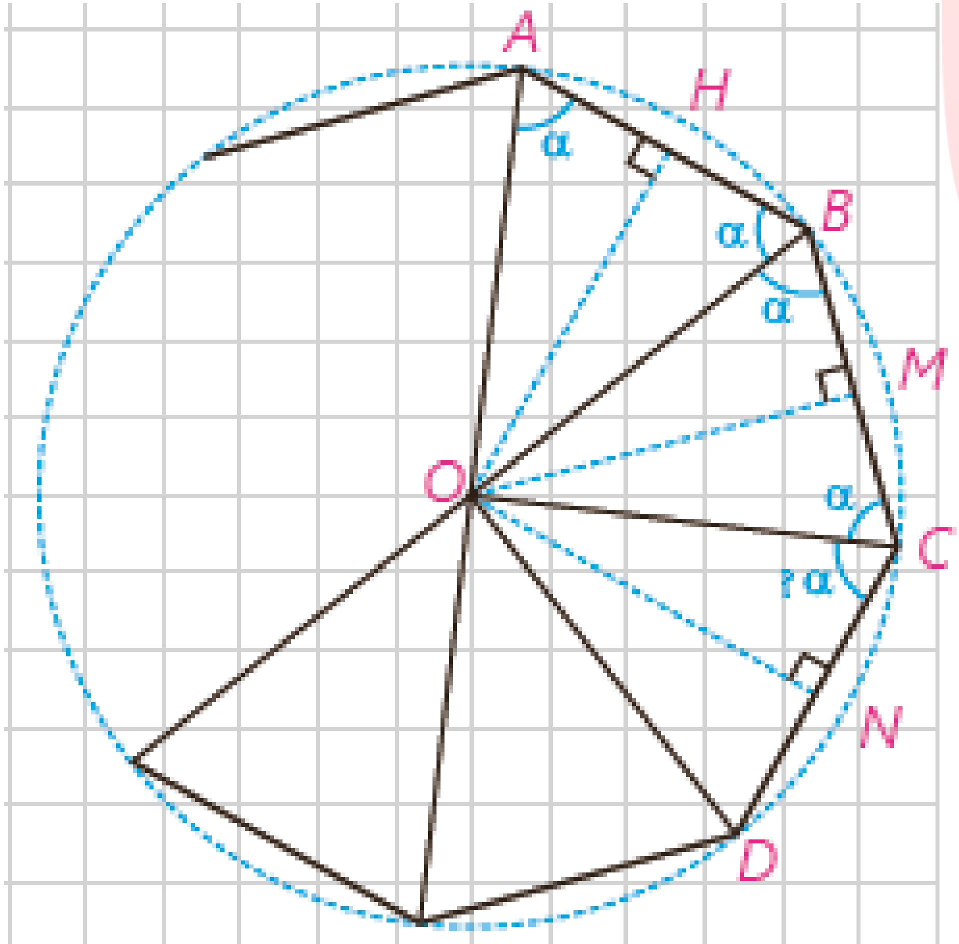
چون مثلثهای OAB و OBC و OCD همگی متساوی الساقین و همنهشت با هم هستند پس

$$OA = OB = OC = OD$$

با ادامه این روند داریم :

$$OA=OB=OC=OD=\cdots\cdots$$

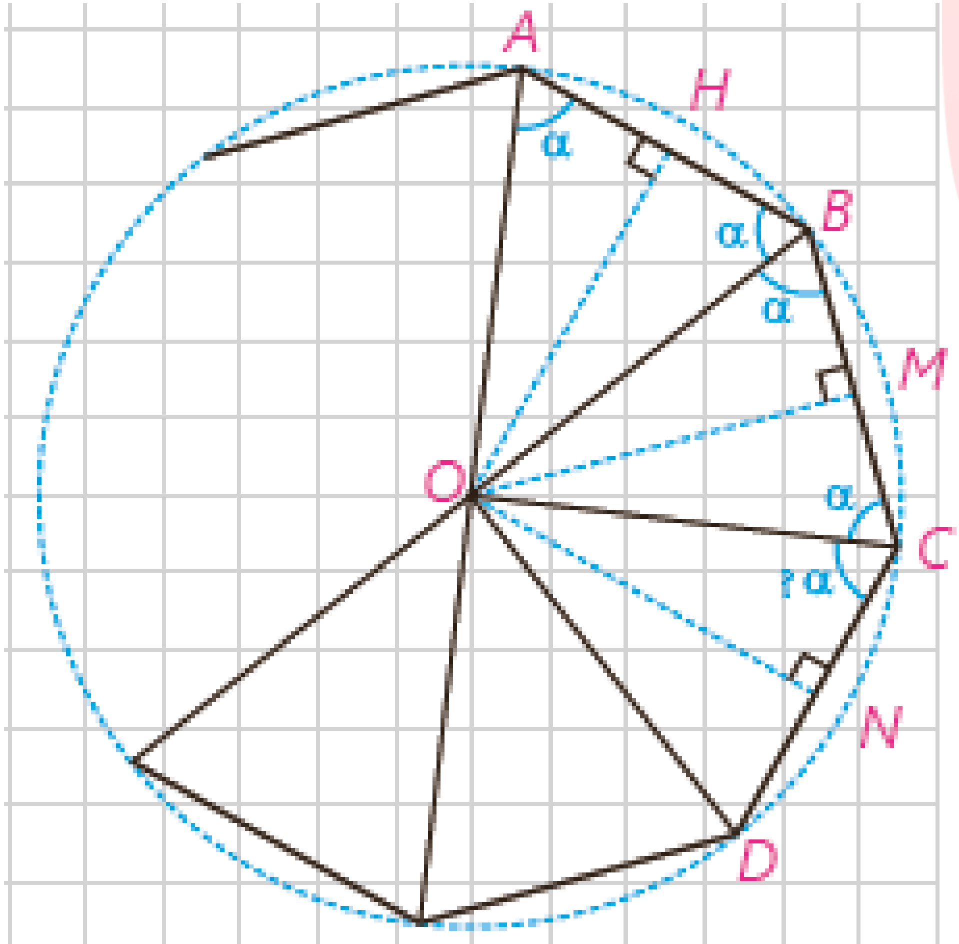
و $OH=ON=OM=\cdots\cdots$



بنابراین، O از همه رأس‌ها به یک فاصله است؛

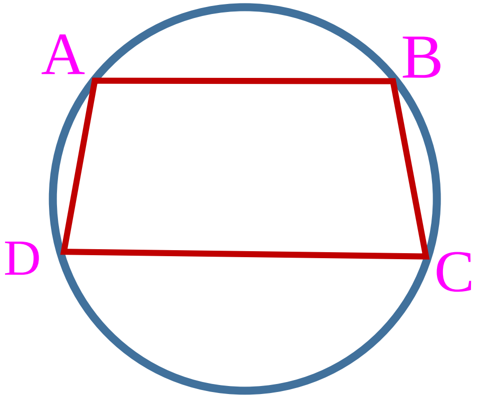
پس مرکز دایره‌ای است که از تمام رأس‌های n ضلعی منتظم می‌گذرد.

به همین ترتیب O از تمام ضلع‌ها به یک فاصله است؛ پس مرکز دایره‌ای است که بر تمام ضلع‌های n ضلعی منتظم مماس است.



تمرین

۱ـ ثابت کنید یک ذوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی‌الساقین باشد.



۱ فرض کنیم ذوزنقه محاطی باشد، پس

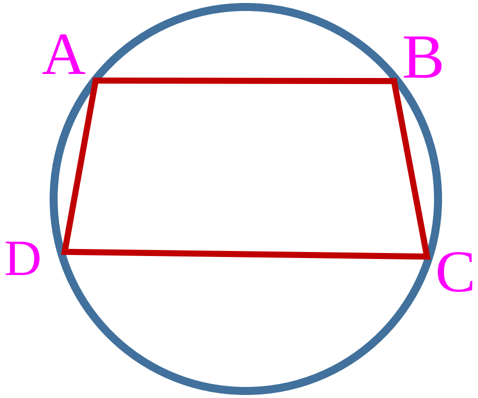
$$\left.\begin{array}{r} \hat{A}+\hat{C}=180^\circ \\ AB \parallel CD \Rightarrow \hat{B}+\hat{C}=180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}=\hat{B}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{ADC}=\overset{\frown}{BCD} \Rightarrow \overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{DC}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC} \Rightarrow AD=BC$$

پس ذوزنقه متساوی الساقین است

۲ فرض کنیم ذوزنقه متساوی الساقین باشد، پس

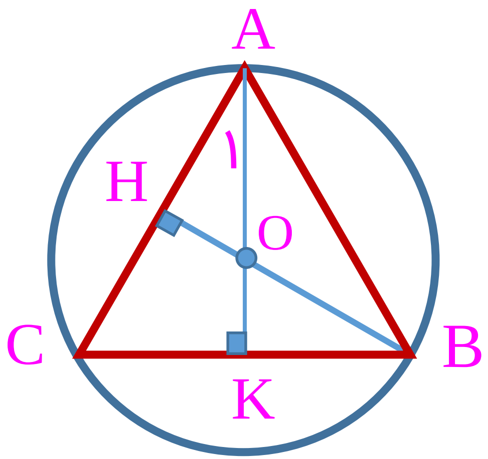


$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{B}\\ \hat{C}=\hat{D}\\ \hat{A}+\underbrace{\hat{B}}_{\hat{A}}+\hat{C}+\underbrace{\hat{D}}_{\hat{C}}=۳۶۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow ۲\hat{A}+۲\hat{C}=۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$$

پس ذوزنقه محاطی است

۲ـ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را به‌دست آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد.



AK: نیمساز است $\quad A_{۱} = ۳۰^\circ \Rightarrow OH = \frac{۱}{۲}OA = \frac{۱}{۲}R$

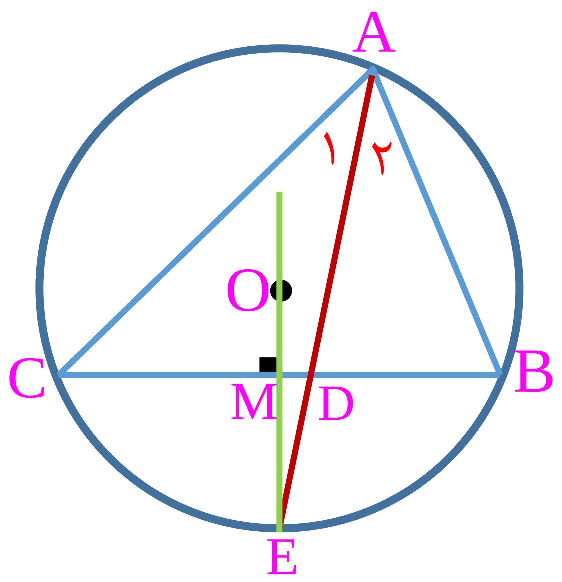
$$\Rightarrow BH = OH + OB = \frac{۳}{۲}R$$

$$\Rightarrow BH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{۳}{۲}R$$

$$a = \sqrt{۳}R \Rightarrow S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(\sqrt{۳}R)^{۲} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}R^{۲}$$

۳ــ ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویهٔ مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث قطع می کنند.



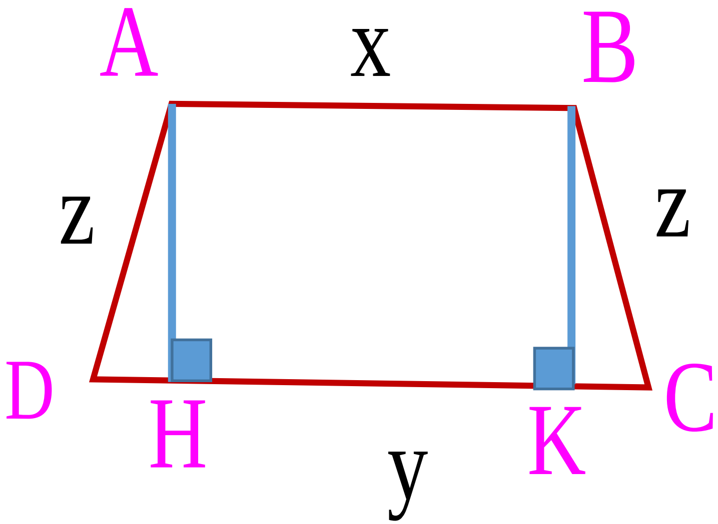
فرض کنیم عمود منصف ضلع BC دایره را در نقطه E قطع کند

OE شعاع عمود بر وتر BC است پس کمان BC را نصف می کند یعنی

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CE} \\ \hat{A}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{CE}}{۲} \\ \hat{A}_۲ = \dfrac{\overset{\frown}{BE}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$$

AD نیمساز زاویه ی A است و عمودمنصف ضلع BC را روی محیط دایره قطع می کند

۴ــ یک ذوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها.



ذوزنقه محاطی است پس متساوی الساقین است.

ذوزنقه محیطی است پس مجموع طول اضلاع روبرو برابر است. یعنی

$$۲z = x + y \Rightarrow z = \frac{x+y}{۲}$$

$$DH = CK = \frac{y-x}{۲}$$

$$AH^۲ = \left(\frac{x+y}{۲}\right)^۲ - \left(\frac{y-x}{۲}\right)^۲ = xy$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow S = \frac{x+y}{۲}\sqrt{xy}$$

۵ــ اگر r_a ، r_b و r_c شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید.

$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{r}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{۱}{r_a}&=\frac{P-a}{S}\\ \frac{۱}{r_b}&=\frac{P-c}{S}\\ \frac{۱}{r_c}&=\frac{P-c}{S}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{P-a}{S}+\frac{P-b}{S}+\frac{P-c}{S}=\frac{۳P-(a+b+c)}{S}=\frac{۳P-۲P}{S}=\frac{P}{S}$$

$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{r}$$

به همین ترتیب اگر h_a، h_b و h_c اندازه‌های سه ارتفاع باشند، نشان دهید :

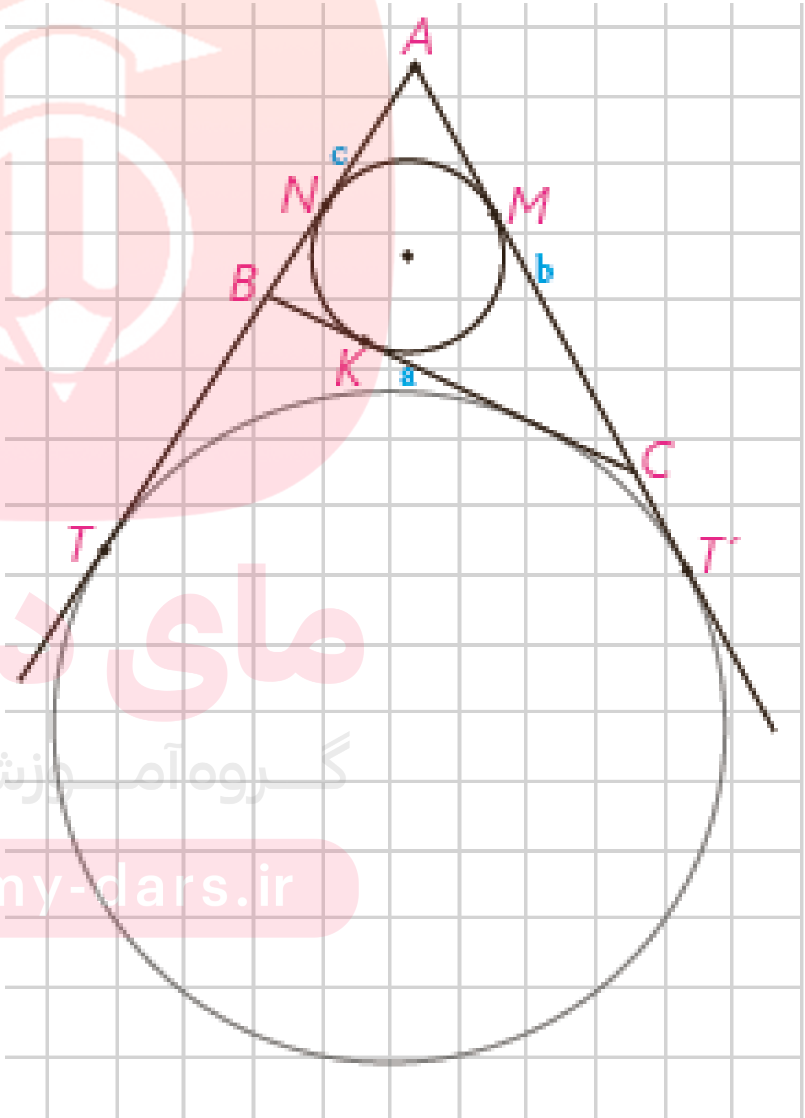
$$\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{r}$$

$$S=\frac{۱}{۲}a.h_a \Rightarrow h_a=\frac{۲S}{a} \quad \Rightarrow \frac{۱}{h_a}=\frac{a}{۲S}$$

بطور مشابه $\frac{۱}{h_b}=\frac{b}{۲S}$ و $\frac{۱}{h_c}=\frac{c}{۲S}$ و در نتیجه

$$\Rightarrow \frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{a+b+c}{۲S} \quad =\frac{۲P}{۲S} \quad =\frac{۱}{r}$$

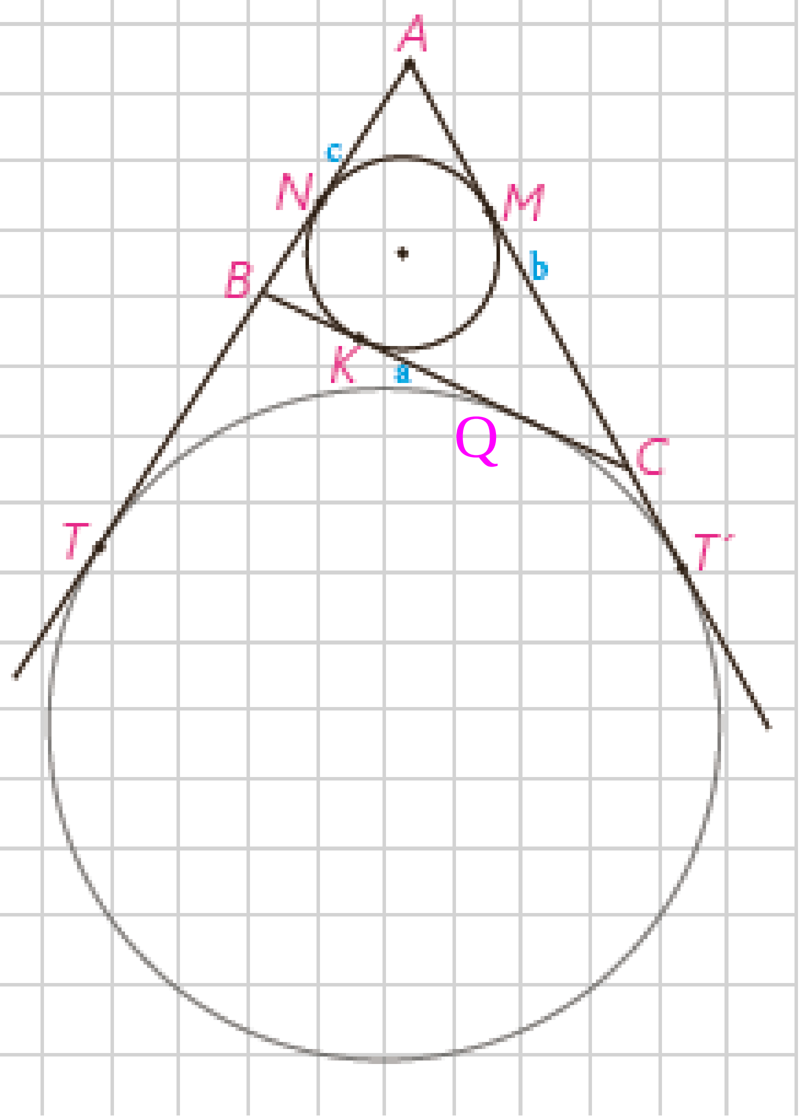
۶ـ اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M، N و K باشند و T و T′ نقطه‌های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط‌های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید :



$AM=AN=P-a$

$BN=BK=P-b, CM=CK=P-c$

$AT=AT'=P$



$$2P = AB + AC + BC$$

$$2P = \underbrace{AN}_{AM} + \underbrace{BN}_{BK} + AM + \underbrace{CM}_{CK} + BK + CK$$

$$2P = 2AM + 2CK + 2BK$$

$$P = AM + \underbrace{CK + BK}_{a} \quad \Rightarrow \quad P - a = AM = AN$$

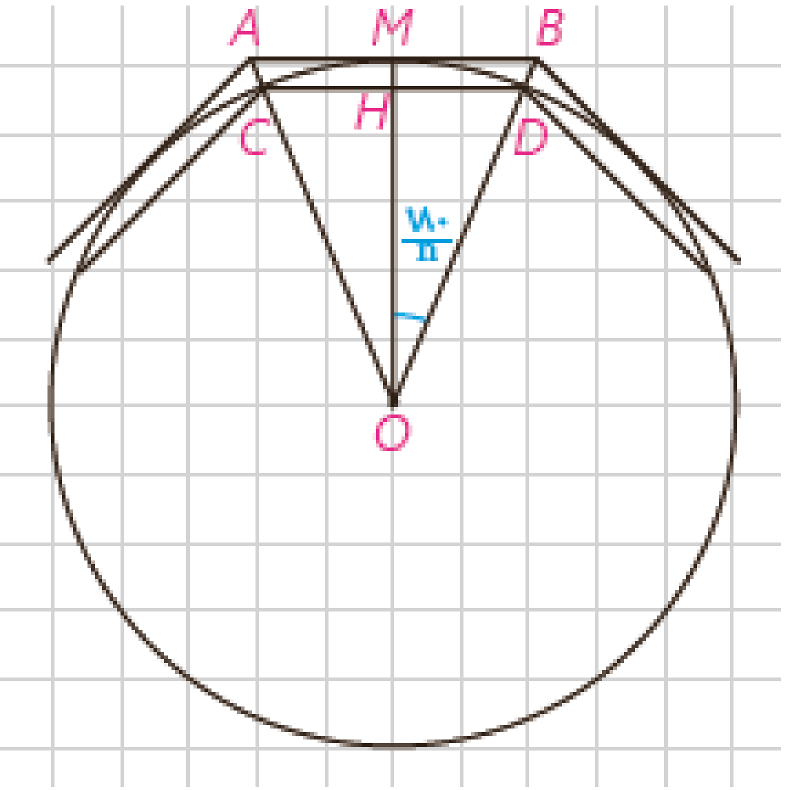
بطور مشابه $BN = BK = P - b$ و $CM = CK = P - c$

قسمت دوم

$$\underbrace{AT'}_{AT} + AT = AB + \underbrace{BT}_{BQ} + AC + \underbrace{CT'}_{CQ} = AB + AC + (CQ + BQ)$$

$$2AT = AB + AC + BC = 2P \quad \Rightarrow \quad AT = AT' = P$$

۷ــ یک دایره به شعاع r و n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در آن در نظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه‌های ضلعی‌های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آن‌گاه $AB = ۲r\tan\frac{۱۸۰}{n}$ و $CD = ۲r\sin\frac{۱۸۰}{n}$.



در $\overset{\Delta}{ODH}$

$$\sin\frac{۱۸۰}{n} = \frac{DH}{OD} = \frac{DH}{r}$$

$$DH = r\sin\frac{۱۸۰}{n} \Rightarrow CD = ۲r\sin\frac{۱۸۰}{n}$$

قسمت دوم

در $\overset{\Delta}{OBM}$

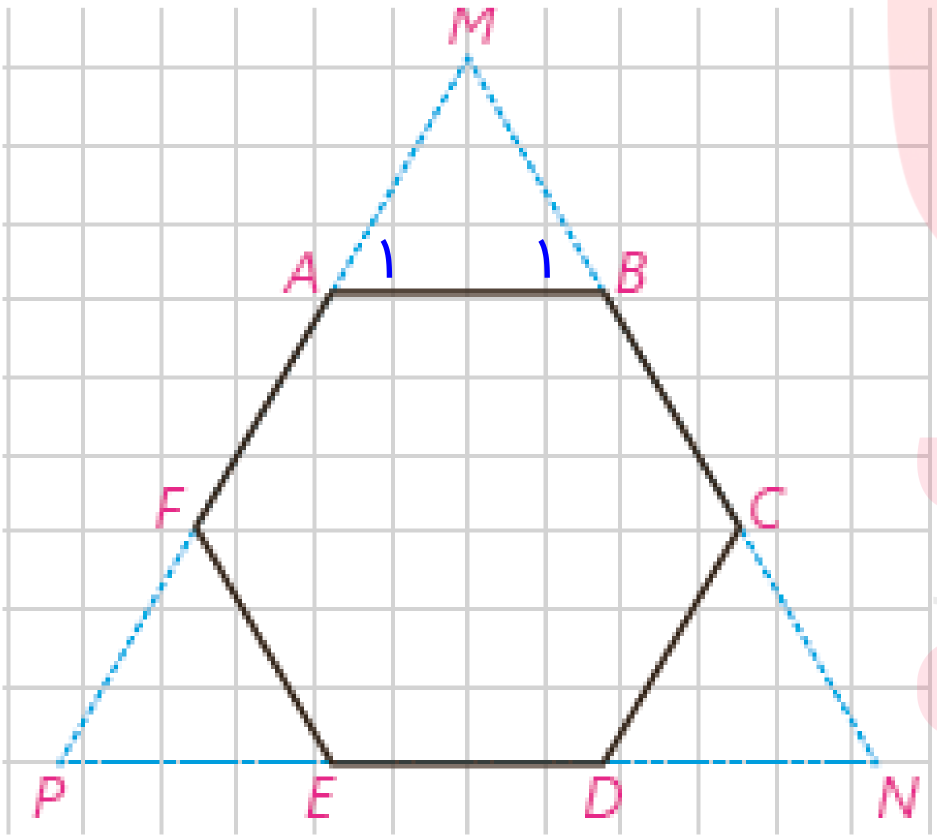
$$\tan\frac{۱۸۰}{n} = \frac{BM}{OM} = \frac{BM}{r}$$

$$BM = r\sin\frac{۱۸۰}{n} \Rightarrow AB = ۲r\sin\frac{۱۸۰}{n}$$

۸ــ شش ضلعی منتظم ABCDEF مفروض است با امتداد دادن اضلاع شش ضلعی،

مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته‌ایم.

الف) نشان دهید MNP متساوی‌الاضلاع است.



اندازه هر زاویه ی خارجی هشت ضلعی منتظم برابر است با

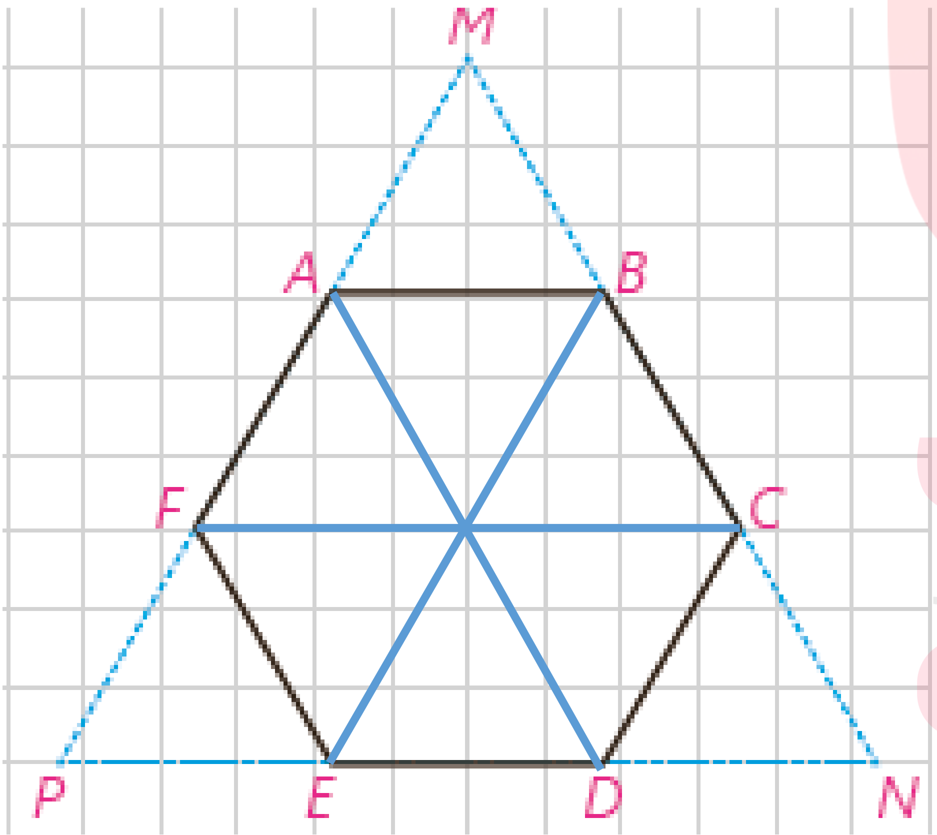
$$\frac{۳۶۰^\circ}{۶} = ۶۰^\circ \quad \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ = ۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{M} = ۶۰^\circ$$

و بطور مشابه

$$\Rightarrow \hat{N} = \hat{P} = ۶۰^\circ$$

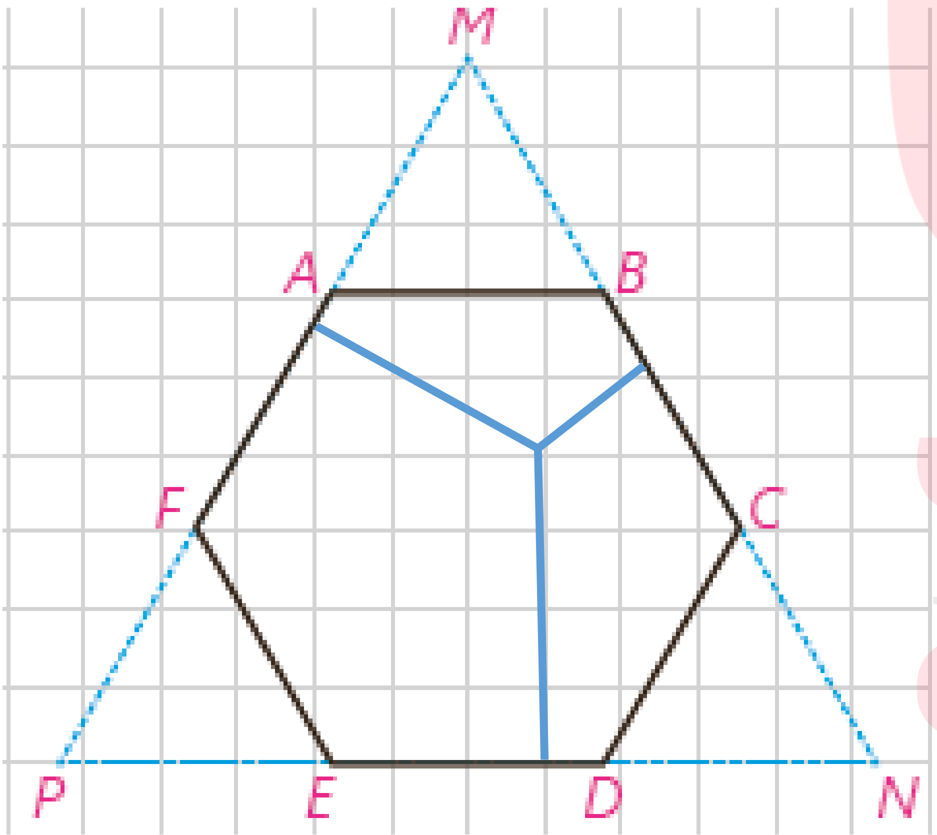
ب) نشان دهید مساحت شش ضلعی، دو سوم مساحت مثلث MNP است.



$$\frac{S_{ABCDEF}}{S_{MNP}} = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳}$$

$$S_{ABCDEF} = \frac{۲}{۳} S_{MNP}$$

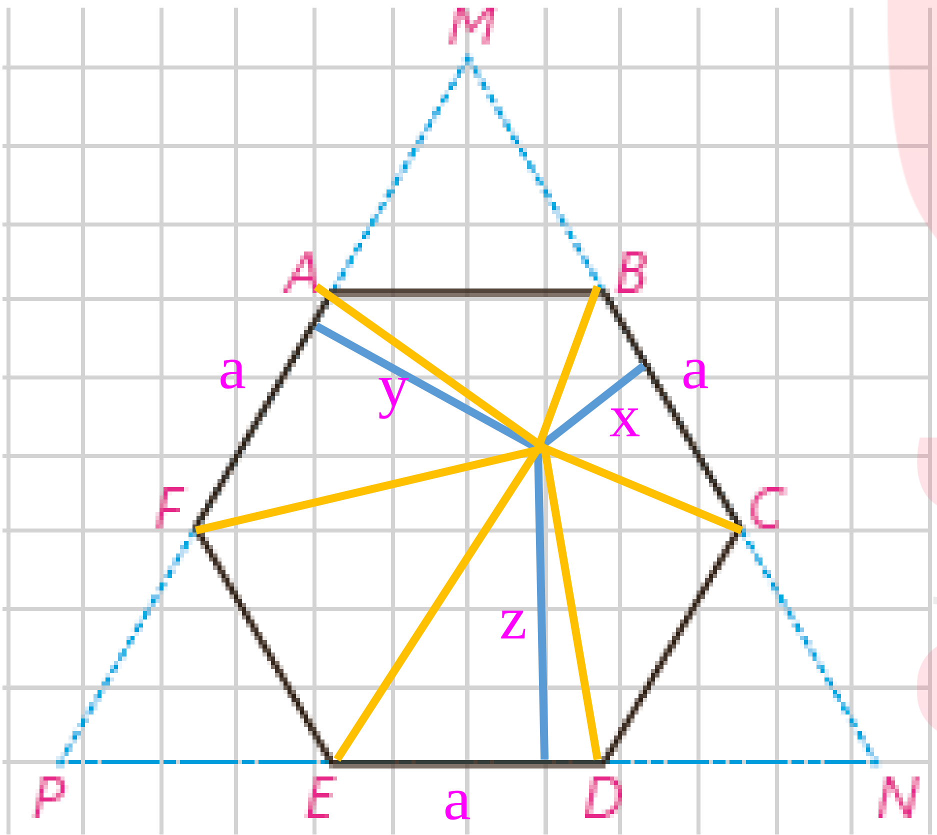
پ) از نقطهٔ دلخواه T درون شش ضلعی عمودهای TH، 'TH و "TH را به ترتیب بر BC، ED و AF رسم کنید. با توجه به آنچه از هندسهٔ پایهٔ ۱ می‌دانید، مجموع طول‌های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟



از هندسه دهم می دانیم مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع برابر ارتفاع مثلث است.

ت) مجموع مساحت‌های مثلث‌های TBC، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید :

$$S_{TBC}+S_{TDE}+S_{TAF}=S_{TAB}+S_{TEF}+S_{TCD}$$



$$S_{TBC}+S_{TDE}+S_{TAF}=\frac{۱}{۲}a(x+y+z)$$

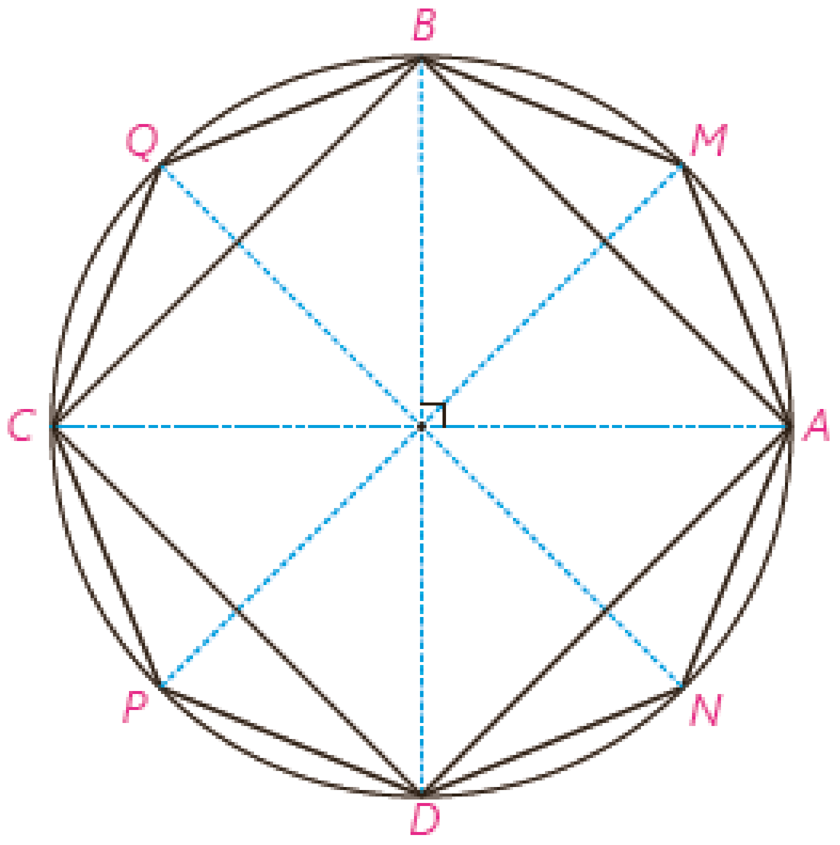
$$=\frac{۱}{۲}ah=\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲}(۳a)h)=\frac{۱}{۳}S_{MNP}$$

$$S_{TAB}+S_{TCD}+S_{TEF}=S_{ABCDEF}-(S_{TBC}+S_{TDE}+S_{TAF})$$

$$S_{TAB}+S_{TCD}+S_{TEF}=\frac{۲}{۳}S_{MNP}-\frac{۱}{۳}S_{MNP}=\frac{۱}{۳}S_{MNP}$$

$$S_{TAB}+S_{TCD}+S_{TEF}=S_{TBC}+S_{TDE}+S_{TAF}$$

۹ــ دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می‌کنیم؛ چهارضلعی ABCD یک مربع است؛ چرا؟ عمود منصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کنند. نشان دهید هشت ضلعی AMBQCPDN منتظم است.



چهارضلعی که قطرهای آن عمود منصف هم باشند، لوزی است.

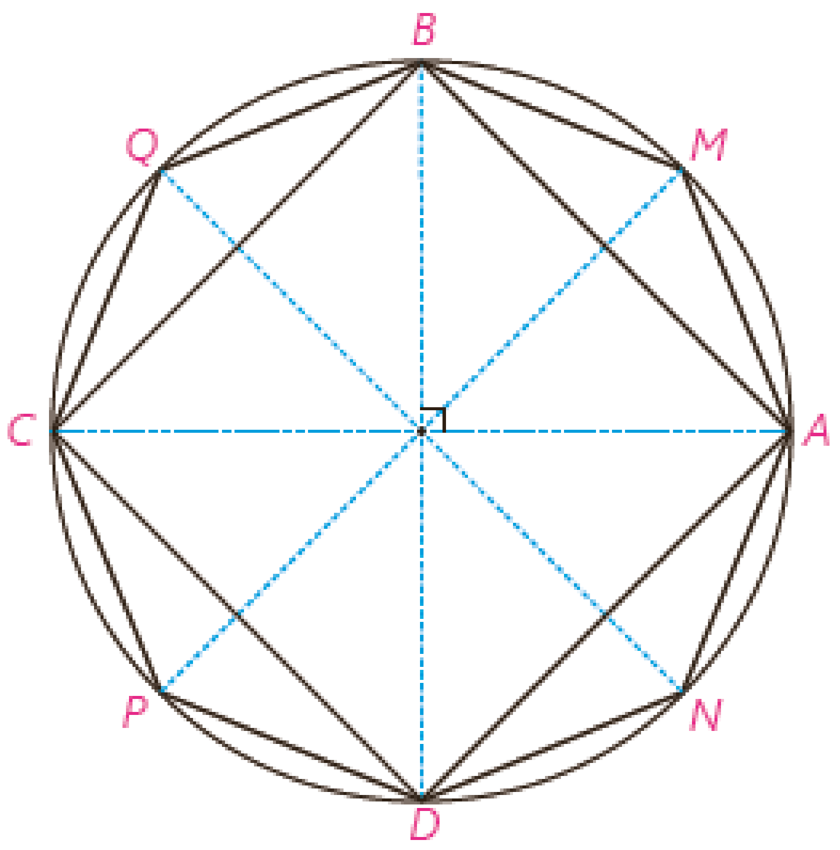
اندازه هر زاویه ۹۰ درجه است چون زاویه ی محاطی روبرو به قطر است

پس چهارضلعی ABCD مربع است

عمود منصف اضلاع مربع از مرکز دایره می گذرند. و قطر عمود بر وتر، وتر و کمان نظیرش را نصف می کند پس

عمود منصف هر ضلع کمان روبروی آنها را به دو کمان برابر تقسیم می کند

پس وترهای نظیر این کمانها نیز برابرند یعنی ۸ ضلع با هم برابرند

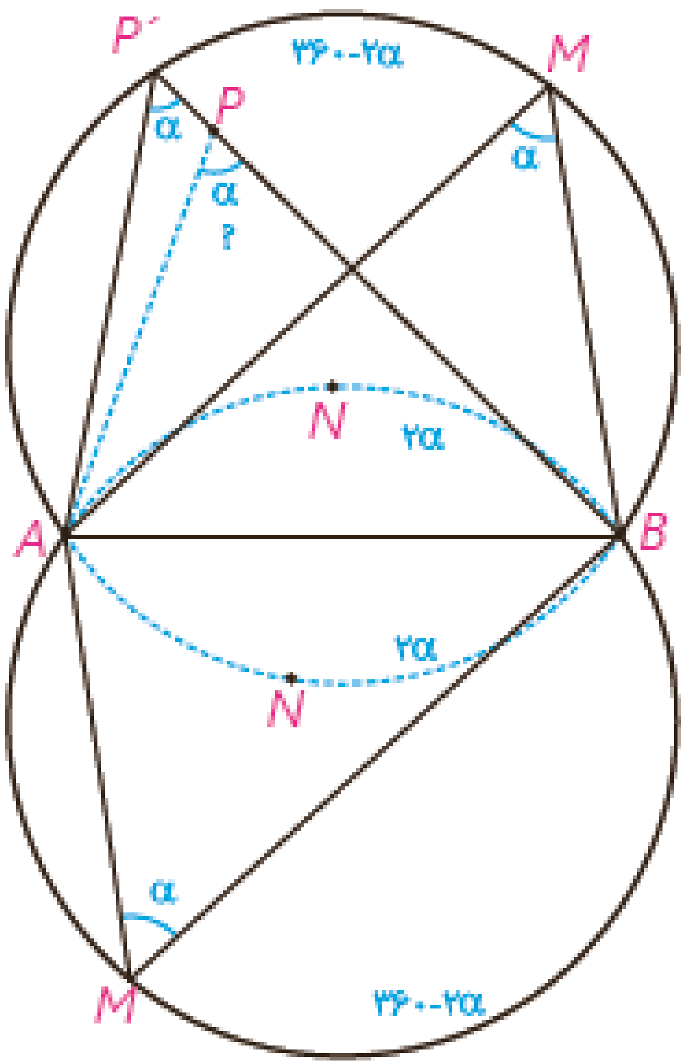


دایره به ۸ کمان برابر تقسیم شده و اندازه هر کمان ۴۵ درجه است

اندازه ی هر زاویه ی آن برابر است با:

$$\Rightarrow \frac{۶\times ۴۵^\circ}{۲}=۱۳۵^\circ$$

زاویه‌های دید و کمان شامل (حاوی)

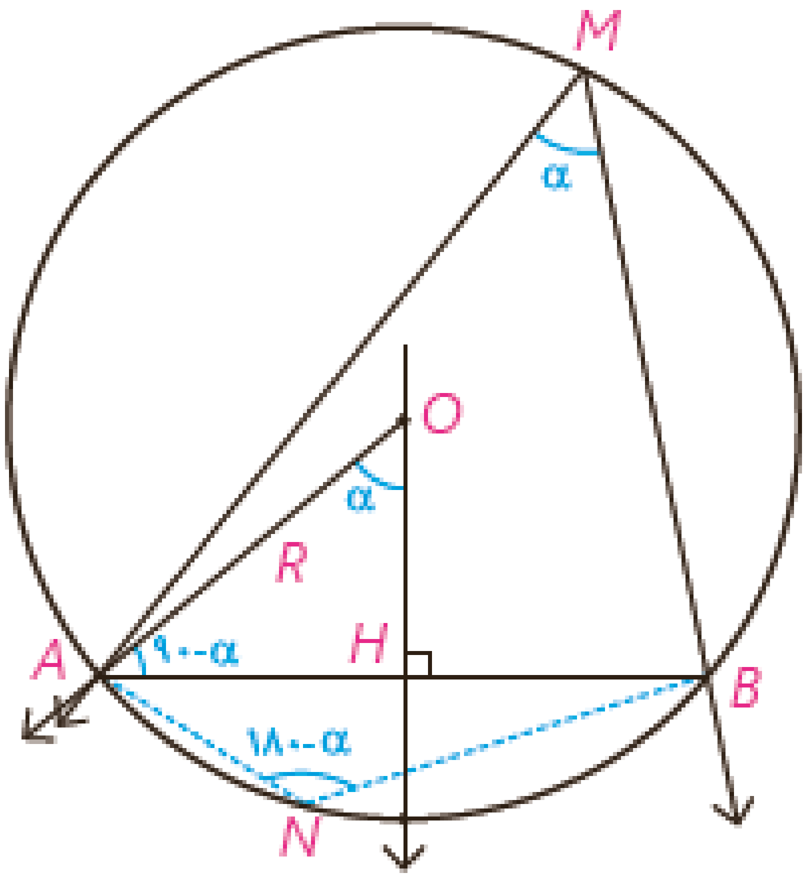


پاره خط AB و نقطه M غیر واقع بر خط AB در یک صفحه مفروض‌اند. فرض کنیم اندازه $\widehat{AMB}$ برابر α باشد، دایره محیطی مثلث AMB را رسم می‌کنیم. اگر از هر نقطه روی کمان AMB به جز A و B به A و B وصل کنیم، اندازه زاویه پدید آمده برابر α است؛ چرا؟ به عکس اگر $\widehat{APB}$ هر زاویه‌ای به اندازه α باشد، آن‌گاه P روی کمان AMB واقع است؛ زیرا اگر P روی کمان AMB واقع نباشد، خط PB دایره را در نقطه‌ای مانند P′ قطع می‌کند؛ پس اندازه $\widehat{AP'B}$ برابر α است؛ اما این امکان ندارد (چرا؟). بنابراین:

مجموعه نقاطی از صفحه، که از آن نقاط پاره خط AB به زاویه با اندازه α دیده می‌شود، دو کمان هم‌اندازه از دو دایره قابل انطباق است، به جز نقاط انتهایی کمان‌ها؛ این کمان‌ها را کمان‌های حاوی زاویه α وابسته به پاره خط AB می‌نامند.

نشان دهید کمان‌های $\overset{\frown}{ANB}$ به جز A و B در این دو دایره، کمان‌های حاوی زاویه به اندازه $\alpha - ۱۸۰$ است؛ یعنی مجموعه نقاطی که از آنها پاره خط AB به زاویه $\alpha - ۱۸۰$ دیده می‌شود.

اگر $\alpha = ۹۰^\circ$، این کمان‌ها چگونه‌اند؟



اگر از مرکز دایره شامل کمان حاوی به A و B وصل کنیم و عمود منصف پاره خط AB را نیز رسم کنیم، اندازه زاویه AOH برابر α یا $۱۸۰ - \alpha$ است؛ چرا؟ در نتیجه اندازه $\widehat{OAB}$ برابر $۹۰ - \alpha$ یا $\alpha - ۹۰$ (α منفرجه باشد).

با استفاده از این مفهوم و عمود منصف یک پاره خط، روش رسم دایره‌های شامل کمان حاوی را بیان کنید.

اگر شعاع کمان حاوی α برابر R و اندازه پاره خط AB برابر α باشد، نشان دهید : $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$ یا $a = 2R\sin\alpha$.