

محمد رضا حاتم آبادی

احتمال

اگر S فضای نمونه محدود و متناهی رخ دادن همه اعضاها برابر باشد احتمال هر سیما

برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد اعضا } A}{\text{تعداد کل } S}$$

روش حل:

② ترتیب

⑦ گزینی

① خودارزی

نمونه احتمال k در n مراتب برابر است:

$$P(k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

مثال: تعداد بارهای n مرتب آمدن مطلوبیت احتمال است:



الف) دوبار سیمت بیاید

$$n(S) = 8$$

$$n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}$$

ب) حداقل دوبار سیمت بیاید

$$P(B) = \frac{\binom{3}{2} + \binom{3}{3}}{2^3} = \frac{3+1}{8}$$

$$P(C) = \frac{\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2}}{2^3} = \frac{7}{8}$$

ج) حداکثر دوبار سیمت بیاید

مسئله 2

با توجه به دو مجموعه A و B که برادری ندارند و تعداد اعضایشان در یک ردیف می آید چقدر احتمال دارد:

$$n(S) = 6! = 720$$

$$n(A) = 5! \cdot 2!$$

$$P(A) = \frac{5! \cdot 2!}{6!} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = 2 \cdot 4! \rightarrow P(B) = \frac{2! \cdot 4!}{6!} = \frac{1}{15}$$

الف) دو برابر یکدیگر باشند
ب) دو برابر دوازدهم باشند

انواع میامرها

$$P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$$

$$P(\emptyset) = \frac{n(\emptyset)}{n(S)} = 0$$

$$A \cap B \neq \emptyset \quad \text{دارا عضو مشترک}$$

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{گروه ورزشی عصر}$$

یکامرحلی

" نهی

" سازگار

" ناسازگار

www.my-dars.ir

مسئله 3

در یک بازی دو تاس احتمال اینکه عدد در هر دو تاس یکبار برابر عدد در هر دو تاس اول باشد چقدر است؟

(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)

(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)

(3, 4), (3, 5), (3, 6)

(4, 5), (4, 6)

(5, 6)

$$P(A) = \frac{15}{36}$$

سوال 14

دو طرفه 5 شماره ها 1، 2، 3، 4، 5 رتبه ام، دو صورت از طرف بر دو طرفه مطلوب است.
احتمال اینکه مجموع شماره ها بزرگتر از 5 باشد.

(2, 5), (1, 5), (3, 5), (4, 5)
(4, 3), (4, 2)

$$P(A) = \frac{6}{\binom{5}{2}}$$

سوال 15 سه تا کره با هم یک باب می کنیم مطلوب است: احتمال اینکه اعداد درسته در هر سه به بیایند.

$$P(A) = \frac{4 \times 4 \times 4}{6 \times 6 \times 6}$$

ترکیب بی شمارها

استرک دو احتمال: بی شمار $A \cap B$ زمانی است که هم A و هم B رخ دهند (با هم)

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

قانون اجتماع دو احتمال: بی شمار $A \cup B$ زمانی است که بی شمار A یا بی شمار B یا هر دو رخ دهند

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

اصل سوم (اجتماع)

اگر دو بی شمار A و B ناسازگار باشند $A \cap B = \emptyset$
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

سؤال 6

عددی از مضاف نمونه ای { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 } انتخاب می‌کنیم احتمال آنکه عدد انتخاب شده زوج یا مضرب 3 باشد را بدست آورید.

$$P(\text{مضرب 3} \cup \text{زوج}) = P(\text{زوج}) + P(\text{مضرب 3}) - P(\text{زوج} \cap \text{مضرب 3})$$
$$= \frac{4}{9} + \frac{3}{9} - \frac{1}{9} = \frac{6}{9}$$

احتمال تقاضی دو سیگارد :

سیگارد A-B یعنی زخمی دهد نه سیگارد A زخمی دهد ولی سیگارد B زخمی ندهد :

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$

سؤال 7

دو تاس احتمال این مجموعه 7 باشد و هیچ کدام عدد اول نباشند را بنویسید.

$$A = \{(1, 6), (6, 1), (3, 4), (4, 3), (2, 5), (5, 2)\}$$

$$B = \{(2, 5), (5, 2)\}$$

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{6}{36} - \frac{2}{36} = \frac{4}{36}$$

متمم یک ششاهد :

$$P(A') = 1 - P(A)$$

همین تابع به فرزند دادل A ←

مثال 8

در یک بازی دو تاس احتمال آنکه دو تاس صدای نبالند چقدر است ؟

$$\text{دو تاس صدو} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{6}{36}$$

مثال 9

در یک خانواده چهار فرزند ، احتمال آنکه حداقل دو فرزند پسر باشند ، چقدر است .

$$\textcircled{I} P(\text{حداقل دو پسر}) = P(\text{دو پسر}) + P(\text{سه پسر}) + P(\text{چهار پسر})$$
$$= \frac{\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}}{2^4}$$

$$\textcircled{II} P(\text{حداقل دو پسر}) = 1 - \{P(\text{یک پسر}) + P(\text{هیچ پسر})\} = 1 - \frac{\binom{4}{1} + \binom{4}{0}}{2^4}$$

گروه آموزشی عصر

ASR_Group@outlook.com

@ASRschool2

سبباً مردها مستقل

دو سگارد A و B را مستقل بگویم هرگاه رخ دادن هر یک تأثیری در دیگری نداشته باشد

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

مسئله 10

در ترتیب سه سکه احتمال اینکه اولی رو و دومی و سومی پشت بیاید چقدر است؟

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(A) \times P(B) \times P(C) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

مسئله 11

احتمال لجبودی شخص A برابر 8٪ و شخص B، 60٪ است. مطلوبیت احتمال آنکه الف هر دو نفر ملاقات خود را بابت آورند یا حداقل یکی از این دو نفر نجات یابند

$$P(\text{الف}) = P(\text{ملاقات فردم}) \times P(\text{ملاقات فرد الف})$$

$$= \frac{8}{100} \times \frac{60}{100} = 0.48$$

www.my-dars.ir

$$\begin{aligned} \rightarrow P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{8}{100} + \frac{60}{100} - \frac{12}{25} = 0.92 \end{aligned}$$

مسئله 12

40 درصد زن ها عامل RH خونی متعلق اند. مطلوبیت احتمال اینکه فردی دارای RH متعلق باشد

$$P(\text{RH متعلق}) = P(\text{مرد متعلق}) \times P(\text{زن متعلق}) = 0.4 \times 0.4 = 0.16$$

مسئله 13

خانواده‌ای دارای سه فرزند است. معلوم است احتمال اینکه RH خون هر سه فرزند یکی نباشد

$$\begin{aligned} P(\text{هر سه } RH^+ \text{ یا هر سه } RH^-) &= P(RH^+, RH^+, RH^+) + P(RH^-, RH^-, RH^-) \\ &= (1/4 \times 1/4 \times 1/4) + (1/4 \times 1/4 \times 1/4) \\ &= 1/8 \end{aligned}$$

$$P(\text{هر سه یکی } RH) = 1 - P(\text{هر سه یکی}) = 1 - 1/8 = 7/8$$

احتمال شرطی

احتمال اینکه سیاه A به شرط اینکه سیاه B رخ داده باشد. $P(B) \neq 0$ برابر است با:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

مسئله 14

تاسی را پرتاب می‌کنیم. هر دایم عدد دوگانه زوج است. احتمال اینکه عدد باشد چقدر است؟

$$S = \{1, 2, \dots, 6\} \rightarrow \begin{cases} A = \{2\} \\ B = \{2, 4, 6\} \end{cases}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

قضیه 1

اگر A و B دو سیاه مستقل باشند، نگاه :

$$P(A/B) = P(A)$$

مثال 15

خانواده دارای سه فرزند است. فرض کنیم فرزند اول پسر است. مطلوب است احتمال اینکه دو فرزند دیگر دختر باشند.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bar{1} \cap 1 \cap \bar{2})}{P(\bar{1})} = \frac{P(\bar{1}) \times P(1) \times P(\bar{2})}{P(\bar{1})} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

اول پسر

قضیه 2 :

اگر A و B دو سیاه ناسازگار باشند، نگاه

$$P(A/B) = 0$$

قانون احتمال می

اگر A_1 و A_2 دو سیاه ناسازگار و متعمیم هم باشند

$$A_1 \cup A_2 = S, A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) = P(A_1) \times P(B/A_1) + P(A_2) \times P(B/A_2)$$

مثال 16

دو جعبه به ترتیب دارای 3 و 5 لایه با نقلا 3 و 5 لایه معیوب است. لایه اولی - لایه وازدوس 8 لایه انتخاب و در جعبه جدید سرانجام همان رنگ جعبه اخیر خارج می کنیم. احتمال اینکه معیوب باشد چند است؟

$$P(\text{معیوب}) = P(\text{جعبه اول معیوب}) \times P(\text{جعبه اول معیوب}) + P(\text{جعبه دوم}) \times P(\text{جعبه دوم / معیوب}) = \frac{1}{18} \times \frac{5}{3} + \frac{8}{18} \times \frac{3}{7}$$

مسئله 16

برداشتن مهرها از داخل کیسه به دو صورت می‌تواند و خیدهای سوال من سوره در حالت می‌تواند
 ترتیب قائل می‌شوم ولی دو مورد خیدهای ترتیب ندارم و نه می‌تواند ترتیب (k)

قابل حل است. I می‌تواند با ترتیب $\left[\begin{matrix} با جایبندی \\ فقط نمونه ای که من سوره \\ بود \end{matrix} \right]$ و بعد می‌تواند کم می‌شود

II خیدهای بدون ترتیب \rightarrow تعداد توزیع (k) می‌باشد.

مسئله 17

در کیسه 5 مهر قرمز و 6 مهر سبز داریم اگر دو مهر یکی می‌تواند با جایبندی خارج کنیم
 مطلوب است احتمال آنکه: الف) اولی قرمز و دومی سبز

www.maydars.ir

$$P(\text{دوم سبز} | \text{اولی قرمز}) = \frac{5}{11} \times \frac{6}{11}$$

$$P(\text{یکی سبز} | \text{مهر قرمز}) = P(\text{اولی قرمز} | \text{دوم سبز}) = \frac{5}{11} \times \frac{6}{11} + \frac{6}{11} \times \frac{5}{11} = \frac{60}{121}$$

دو سیاه و ابیه :

نتیجه هم مستقل و اساتر و در مسئله ۱ :

$$P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

برقرار نباشد.

۲- احتمال ها غیر هم سانس

لازمه برابر است و مجموع آنها صفت کل را تشکیل دهند

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

$$A_1 \cap A_3 = \emptyset \quad A_1 \cup A_2 \cup A_3 = S \Rightarrow P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$$

$$A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$$

مای درس

سؤال ۱۸

سه نفر در بقیه دو صیانی شرکت کنند احتمال بزنند سون شخص A (دو بار شخص B و احتمال بزنند سون B دو بار C من به سه مطلوب است احتمال

www.maydars.ir

الف) A بزنند شود

ب) A یا C بزنند شوند

ج) B بزنند شود

$$\begin{cases} P(A) = 2P(B) \\ P(B) = 2P(C) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P(A) = \frac{4}{7} \\ P(B) = \frac{2}{7} \\ P(C) = \frac{1}{7} \end{cases}$$

چون سابقه حتما بزنند دارد پس $P(A) + P(A_2) + P(A_3) = 1$

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{5}{7}$$

$$P(B') = 1 - P(B) = \frac{5}{7}$$

تابع توزیع دو جمله‌ای

آزمایش تنها با دو نتیجه رد یا قبول را روند

تابع توزیع برنولی: $f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

n کل تکرار
 x تعداد مطلوب
 p احتمال مطلوب هر دفعه

مسئله 19

سه بار با نفع یا زیان منتهی احتمال این سه بار و بیاید

$$\begin{cases} P(3) = \frac{\binom{5}{3}}{2^5} = \\ f(3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \end{cases}$$

گروه آموزشی عصر

مسئله 20

در یک جعبه 4 مهره قرمز و 3 مهره سفید است. احتمال اینکه 2 مهره قرمز و 1 مهره سفید بیاید چقدر است؟

$n=3$

$x=2$

$P(2) = \frac{4}{9}$

$f(2) = \binom{3}{2} \left(\frac{4}{9}\right)^2 \left(1 - \frac{4}{9}\right)$

متغیر تصادفی

اگر به هر چند نتیجه از یک سری عددی نسبت دهیم، آن عدد را متغیر تصادفی می نامند

مسئله 21

خانواده ای صاحب دو فرزند است. تمام حالات را به یک رنگ درختی و درخت متغیر تصادفی توصیف کنید.

$$S = \{ (د، د) ، (د، د) ، (د، د) ، (د، د) \}$$

	(د، د)	(د، د) ، (د، د)	(د، د)
$n = 3$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$
p			

متغیر تصادفی
تعداد پسران $x =$

جدول توزیع احتمال: چیدمانی که بیانگر تمام حالات با احتمال باشد

مسئله 22

رضا نوازه ای 3 فرزند به دنیا آورده است. جدول توزیع احتمال تعداد پسران از دو رنگ فوق را بنویسید

$$P \left| \begin{array}{c} x=0 \\ \frac{1}{8} \\ x=1 \\ \frac{3}{8} \\ x=2 \\ \frac{3}{8} \\ x=3 \\ \frac{1}{8} \end{array} \right.$$

پسرها:

$$n = 3$$

$$p = \frac{1}{2}$$

$$P \left| \begin{array}{c} x=0 \\ \binom{3}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \\ x=1 \\ \binom{3}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} \\ x=2 \\ \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1-\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8} \\ x=3 \\ \binom{3}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1-\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8} \end{array} \right.$$

مسئله 23

در آزمایه‌های 5 سوئل سفید، 4 سوئل سیاه، 3 سوئل زرد انتخاب می‌کنیم جدول توزیع احتمال حاصل

سوئل سفید انتخاب شده	$\eta = 0$	$\eta = 1$	$\eta = 2$	$\eta = 3$
P	$\frac{\binom{5}{0}\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}}$	$\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}}{\binom{12}{3}}$	$\frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}}{\binom{12}{3}}$	$\frac{\binom{5}{3}\binom{4}{0}}{\binom{12}{3}}$

نکته

برای منابع محدود ← فقط روش ترکیبی مسائل است.

→ نامحدود → روش دلفی یا روش دو طبقه یا تقارن

مسئله 24

در آزمون 5 صفر قرمز، 4 صفر سفید، 3 صفر زرد داریم، دو صفر خارج می‌کنیم جدول توزیع احتمال تعداد صفرها سفید را بنویسید.

η	$\eta = 0$	$\eta = 1$	$\eta = 2$
P	$\frac{\binom{4}{0}\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}}$	$\frac{\binom{4}{1}\binom{8}{1}}{\binom{12}{2}}$	$\frac{\binom{4}{2}\binom{8}{0}}{\binom{12}{2}}$

مسئله 25

در آزمایه‌های 5 سوئل سبز، 3 سوئل زرد انتخاب می‌کنیم دو سوئل از مجموعه را انتخاب می‌کنیم با کدام احتمال فقط یک سوئل سبز انتخاب می‌شود؟

$$\frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}}$$

سوال 25

درجه اول معادله موجود است. 0.5 احتمال وقوع است و اگر 3 لایه انتخاب کنیم

احتمال اینکه 2 تا از آنها موفق باشند چقدر است؟

* منبع مورد

$$\text{حل شرط: } \begin{cases} n=3 \\ p=\frac{5}{20}=\frac{1}{4} \\ x=2 \end{cases} \quad f(x) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(1-\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{2}{64}$$

$$\text{حل صحیح: } P(\text{دو لایه موفق}) = \frac{\binom{5}{2} \binom{15}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{5}{38}$$

سوال 26

رضانواده ای با چهار فرزند، احتمال اینکه RH خون فرزندان یک دو صفت باشد چقدر است؟

$$\begin{aligned} P(\text{یک روستا}^+) &= P(RH^+, RH^-, RH^+, RH^-) + P(RH^-, RH^+, RH^-, RH^+) \\ &= (0.84 \times 0.16 \times 0.84 \times 0.16) + (0.16 \times 0.84 \times 0.16 \times 0.84) \end{aligned}$$

گروه آموزشی عصر